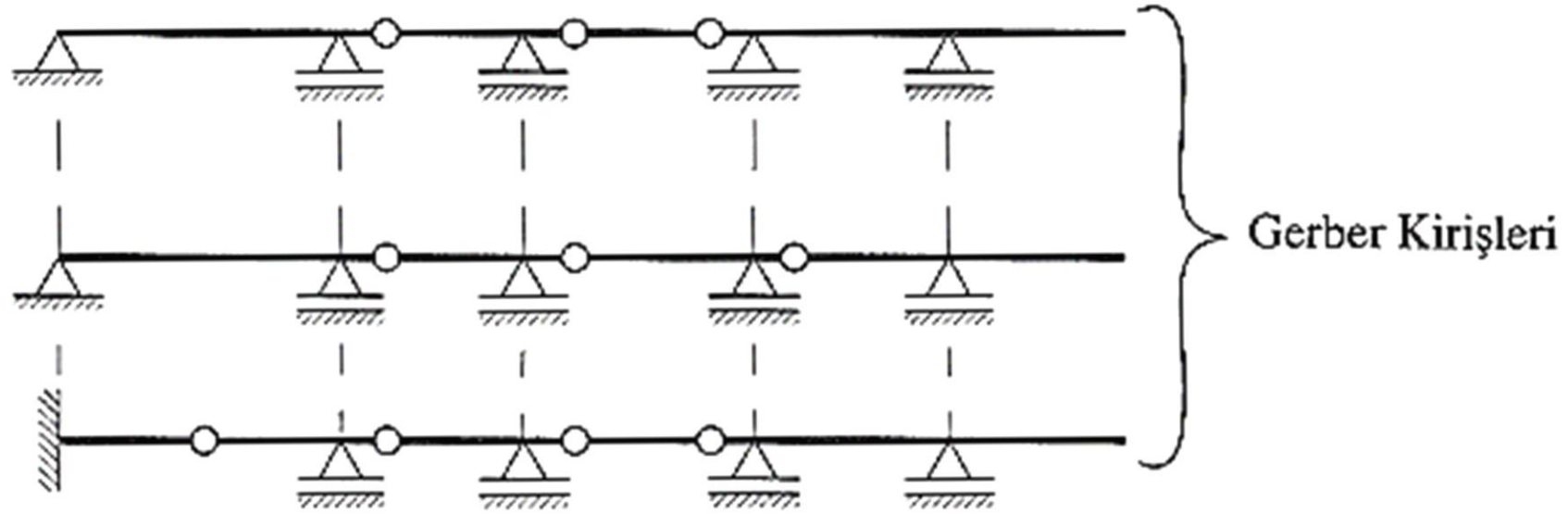


YAPI STATİĞİ 1
DERS NOTLARI 8b
Prof. Dr. Cengiz Dünder

Gerber kirişleri

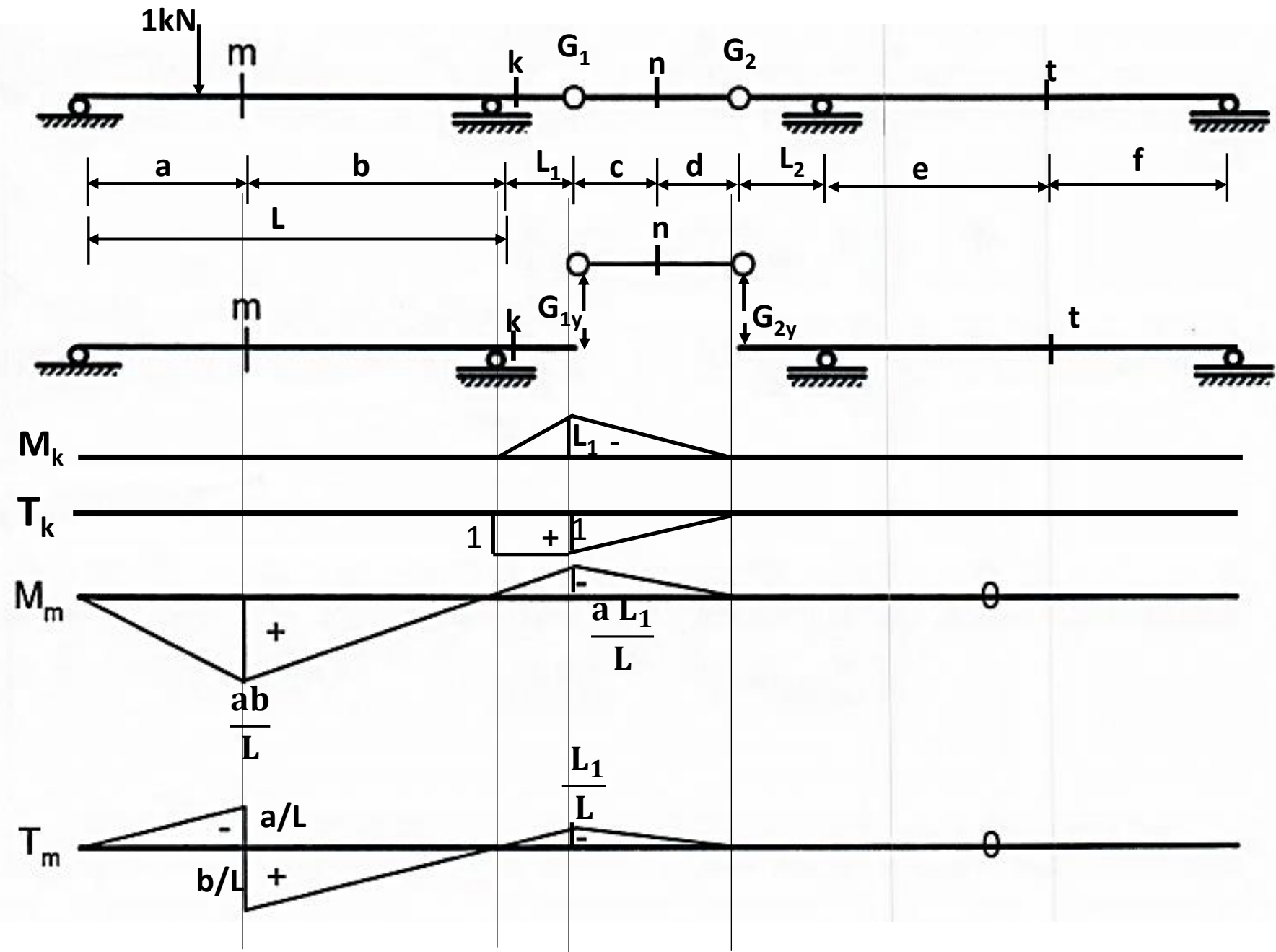
Sürekli kırışlara yeter sayıda mafsal ilave edilerek elde edilen taşıyıcı ve izostatik sistemlerdir.

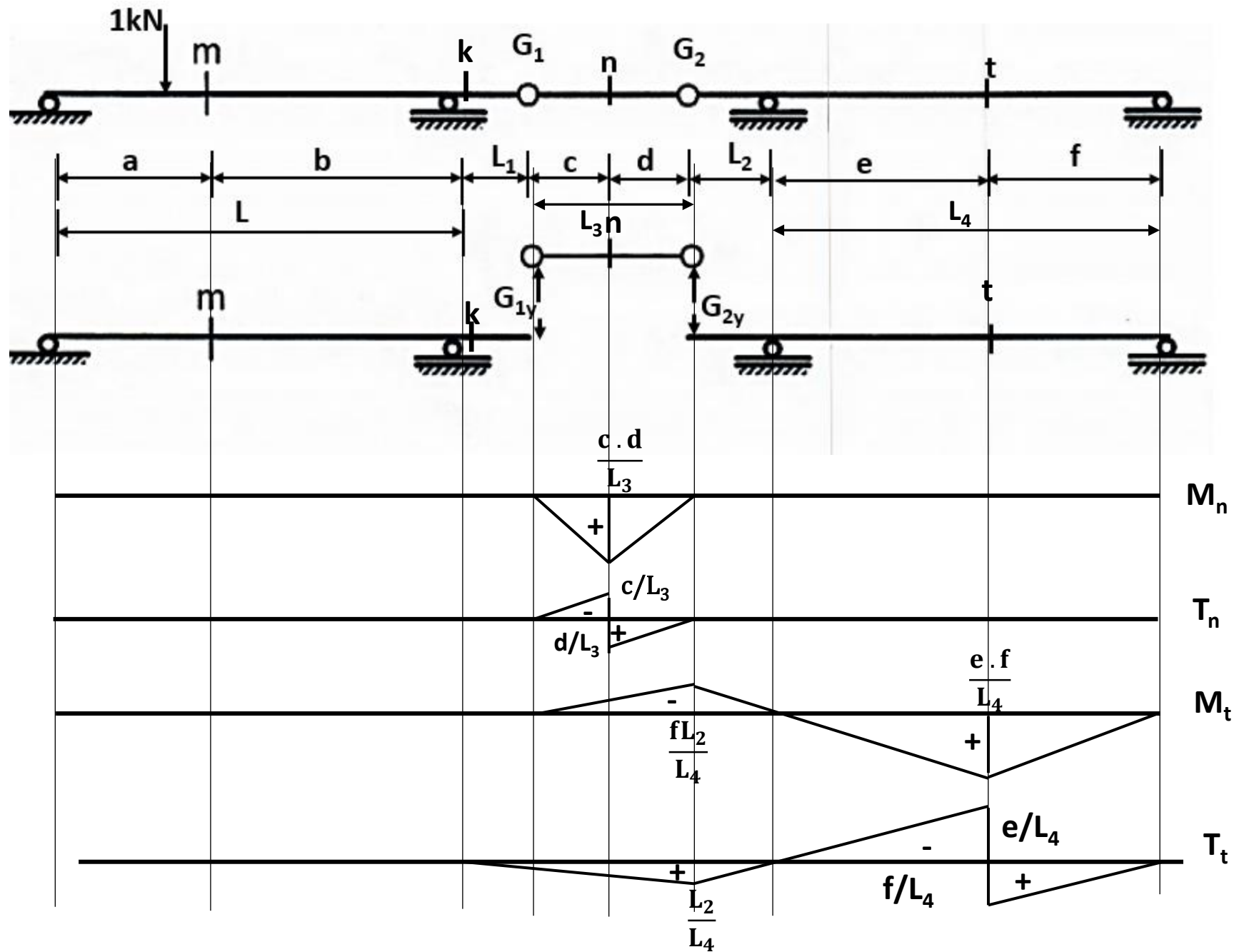


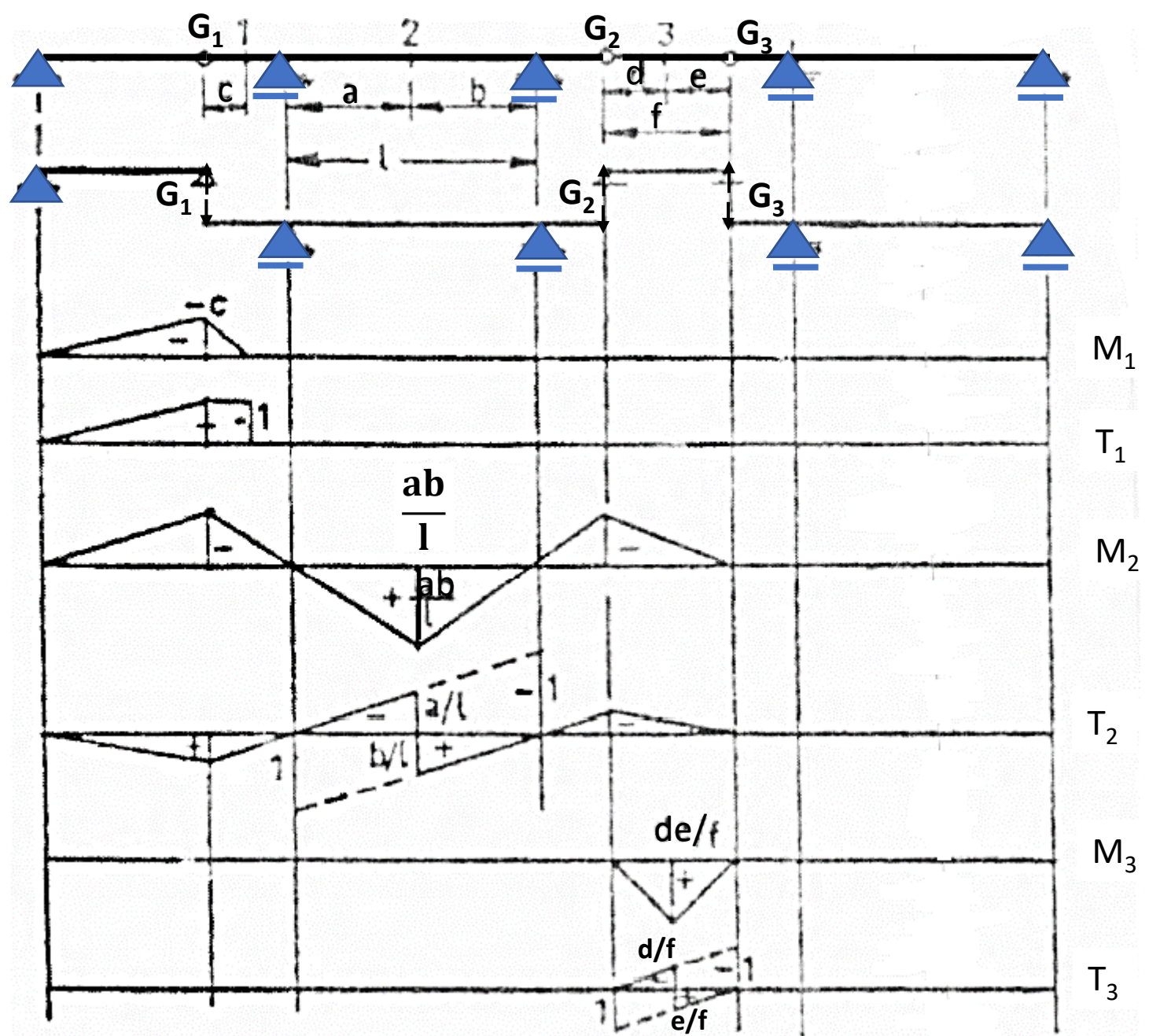
Gerber kirişlerinde taşıma şeması çizildiği zaman elde edilen alt sistemler, basit kiriş, çıkmalı kiriş ve/veya konsol kiriştir. Dolayısıyla Gerber kirişi bu basit parçalarda çizilen tesir çizgilerinin belli kurallar altında bir araya getirilmesinden oluşur.

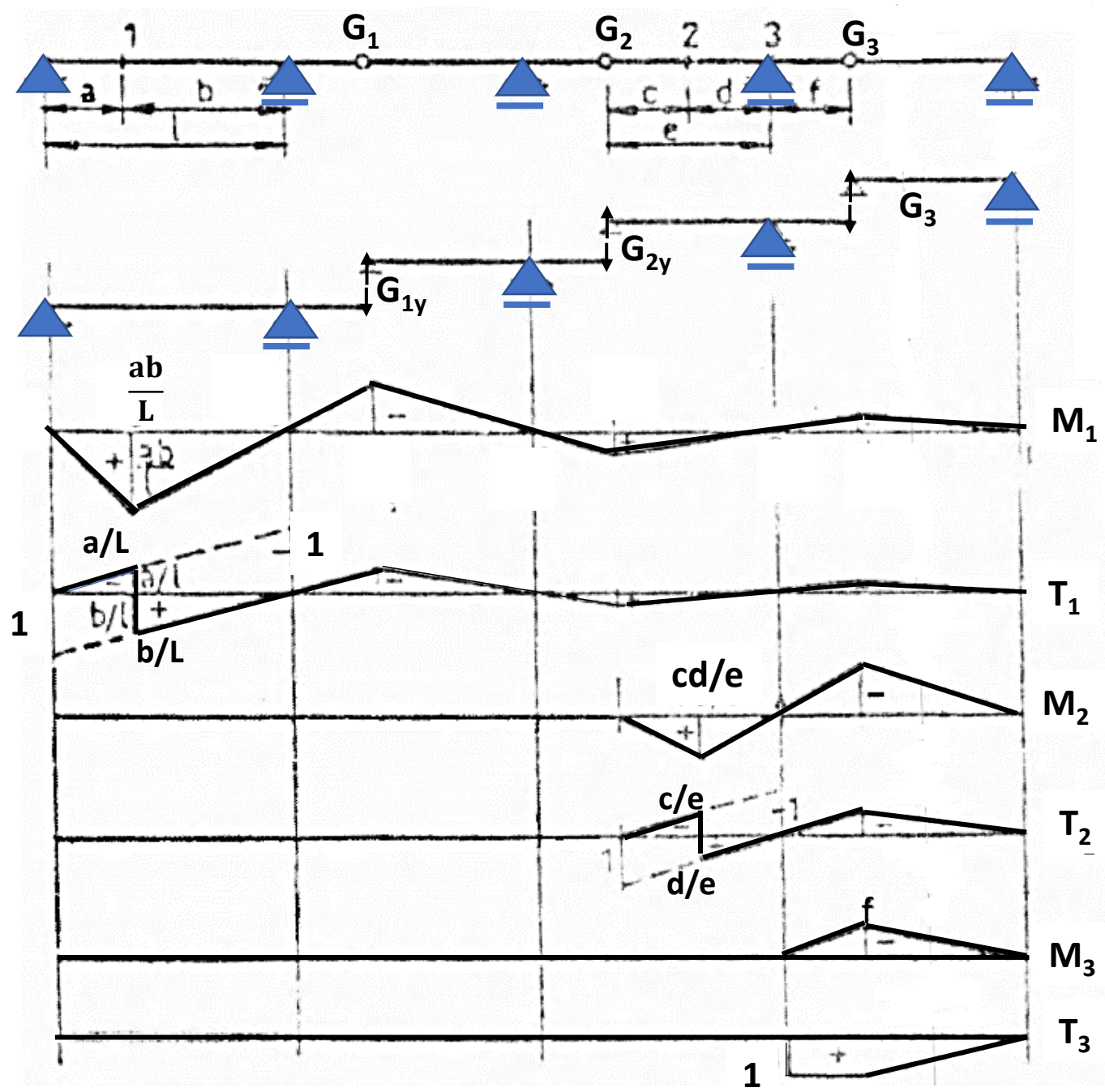
Kurallar:

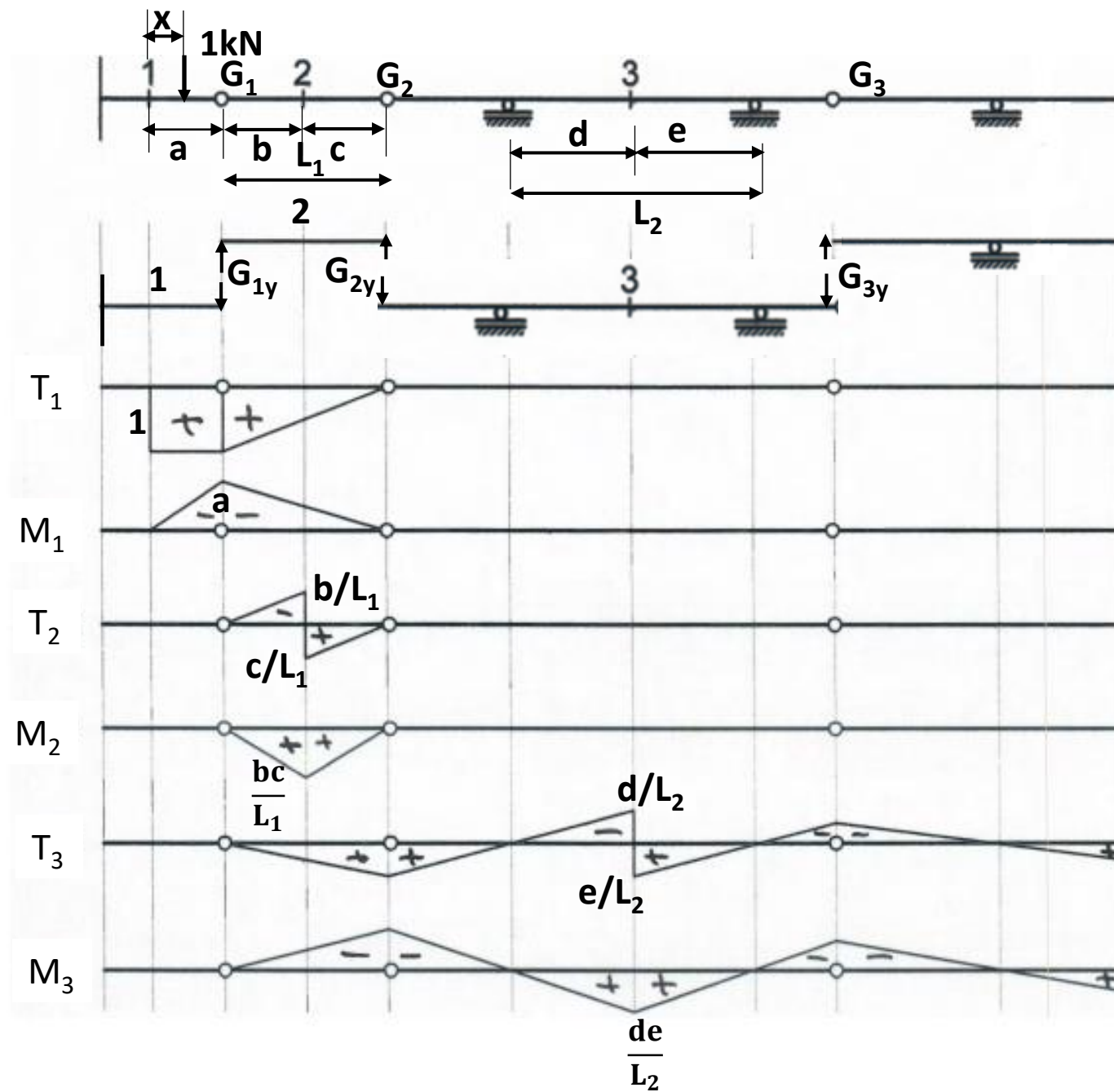
1. Sistemin taşıma şeması çizilir.
2. Aranılan tesir çizgisi, tesir çizgisi çizilmek istenen büyüklüğün üzerinde bulunduğu parça ile bu parçanın taşıdığı diğer parçalar dışında sıfırdır.
3. Tesir çizgisi çizilmek istenen büyüklüğün üzerinde bulunduğu parça üzerindeki tesir çizgisi bölümü, söz konusu parçanın yapısı doğrultusunda basit kiriş, konsol kiriş ve/veya çıkmalı kiriş tesir çizgisi gibi çizilir.
4. Komşu parçalar üzerindeki tesir çizgisi bölümü,
 - a) Mesnetlerde sıfırdan geçecek,
 - b) Mafsallarda kırıklık yapacak şekilde tamamlanır.

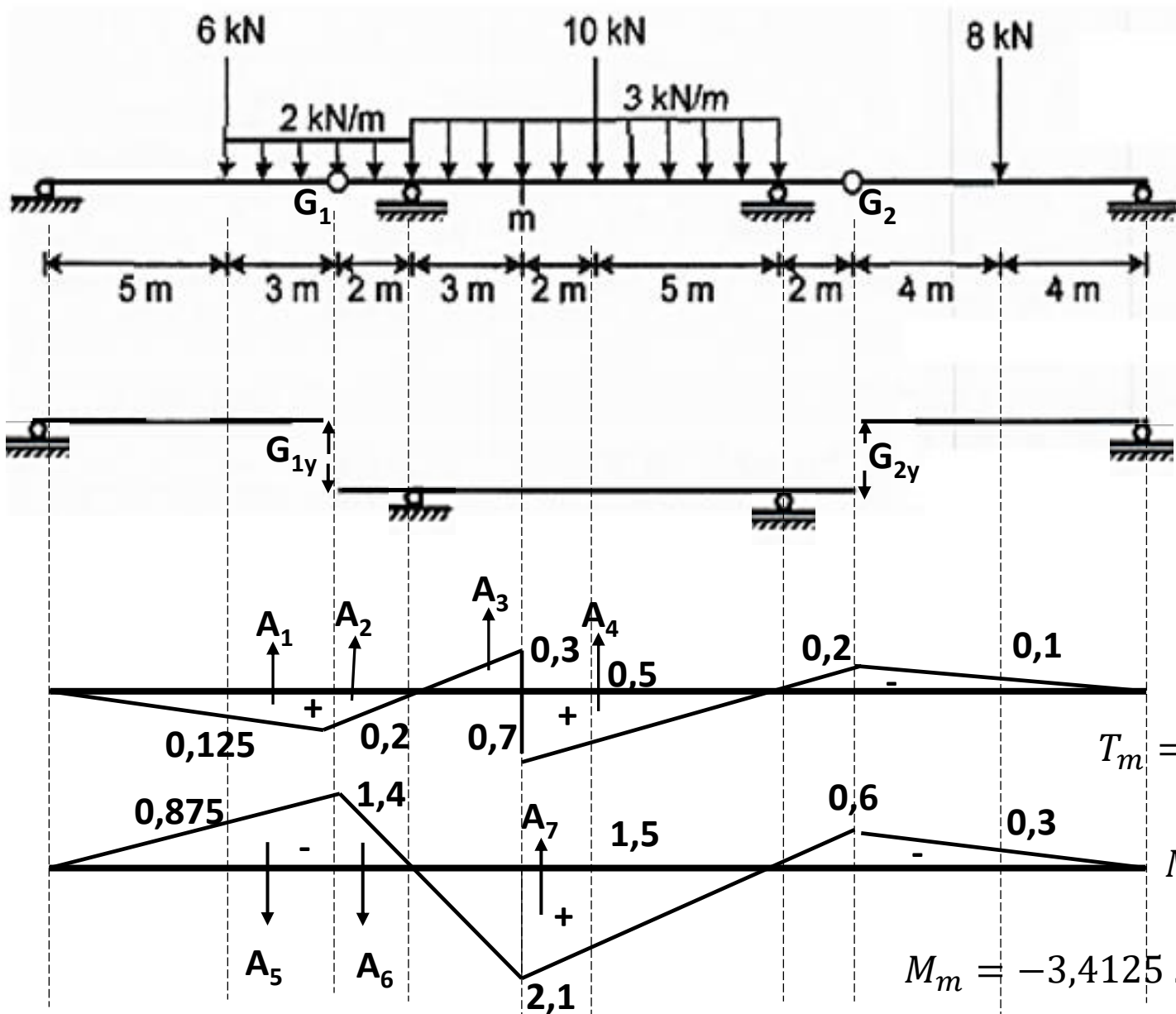












$$A_1 = \frac{0,125 + 0,2}{2} \cdot 3 = 0,4875$$

$$A_2 = \frac{0,2 \cdot 2}{2} = 0,2 \quad A_3 = \frac{0,3 \cdot 3}{2} = 0,45$$

$$A_4 = \frac{0,7 \cdot 7}{2} = 2,45$$

$$A_5 = \frac{0,875 + 1,4}{2} \cdot 3 = 3,4125$$

$$A_6 = \frac{1,4 \cdot 2}{2} = 1,4 \quad A_7 = \frac{2,1 \cdot 10}{2} = 10,5$$

$$T_m = A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2 - A_3 \cdot 3 + A_4 \cdot 3 + 6 \cdot 0,125 + 10 \cdot 0,5 - 8 \cdot 0,1$$

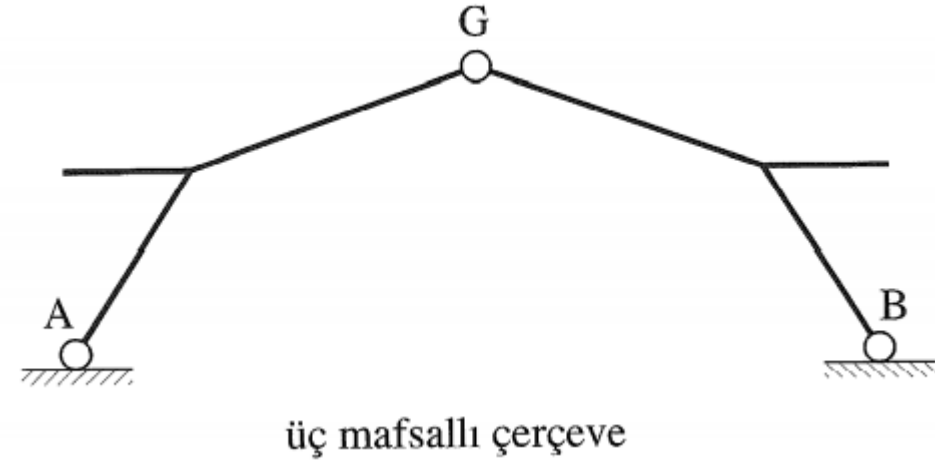
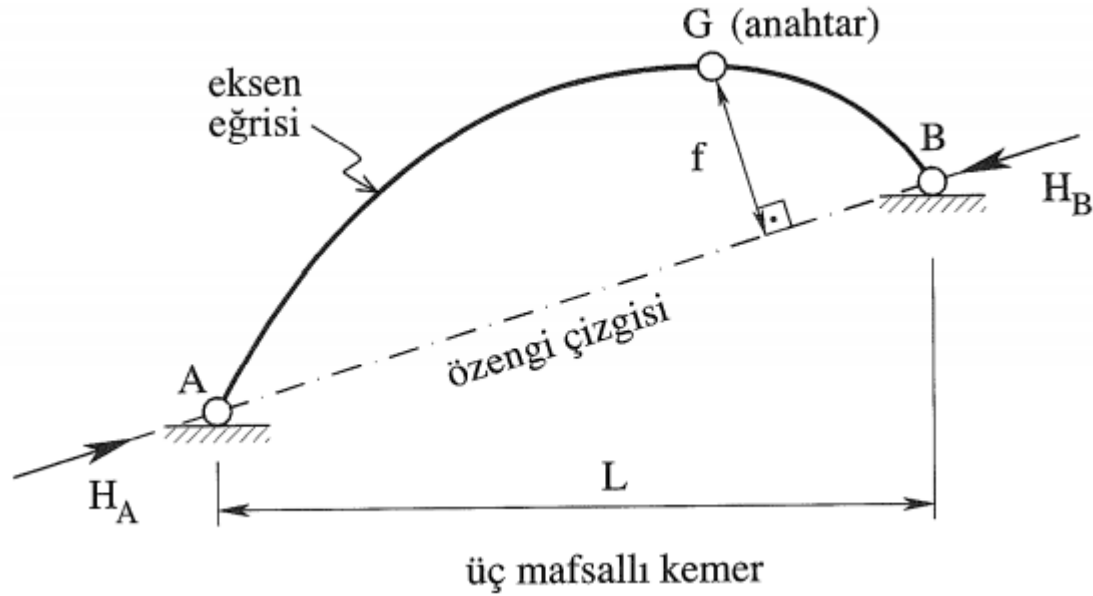
$$T_m = 0,4875 \cdot 2 + 0,2 \cdot 2 - 0,45 \cdot 3 + 2,45 \cdot 3 + 0,75 + 5 - 0,8 = 12,325 \text{ kN}$$

$$M_m = -A_5 \cdot 2 - A_6 \cdot 2 + A_7 \cdot 3 - 6 \cdot 0,875 + 10 \cdot 1,5 - 8 \cdot 0,3$$

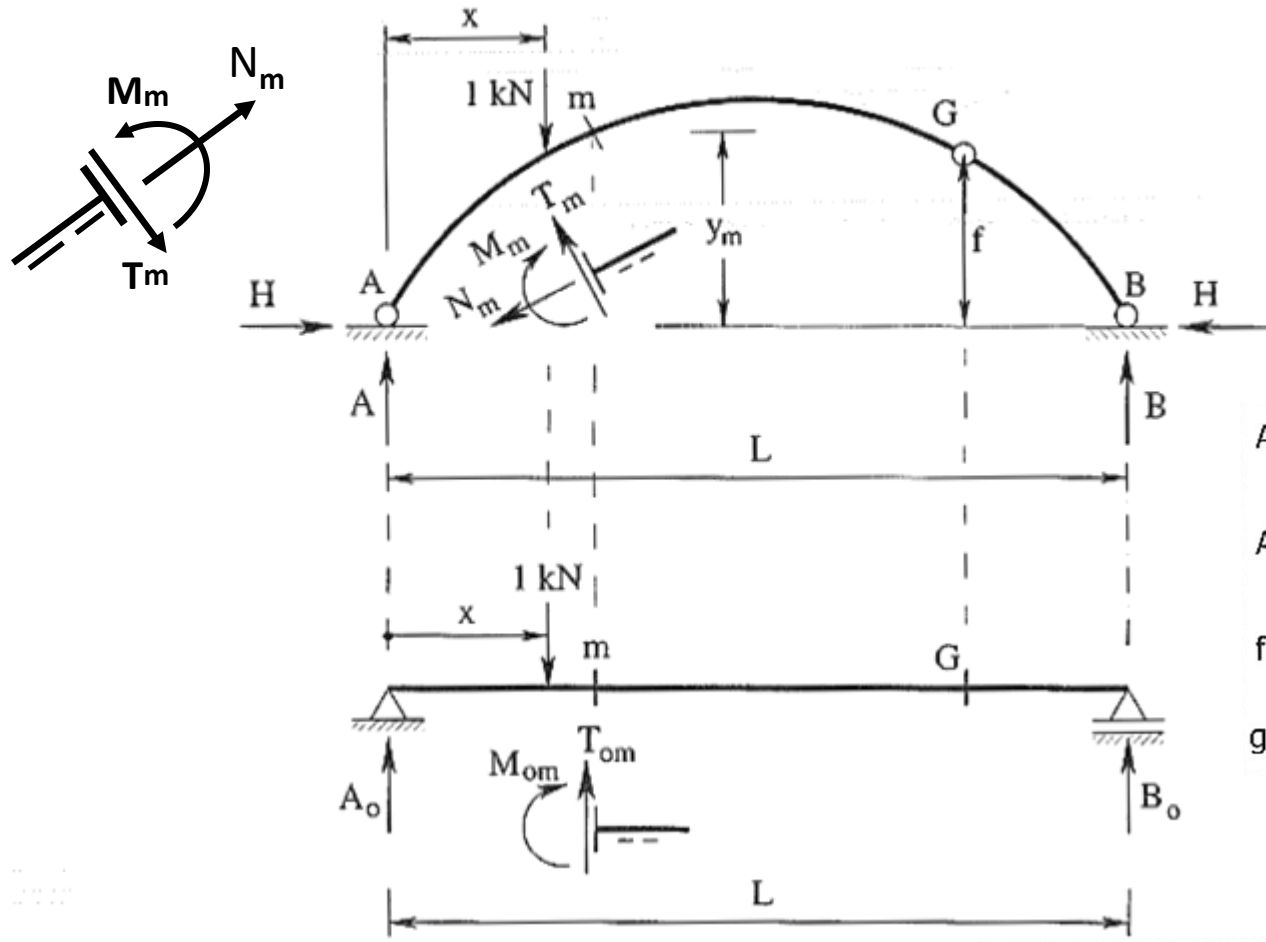
$$M_m = -3,4125 \cdot 2 - 1,4 \cdot 2 + 10,5 \cdot 3 - 5,25 + 15 - 2,4 = 29,225 \text{ kNm}$$

Üç mafsallı kemer ve çerçeveler

Mesnetleri sabit mesnet olan ve bu mesnetler arasında bir mafsalı bulunan taşıyıcı sistemlere üç mafsallı sistemler denir.



Hareketli yüklere göre hesap – tesir çizgilerinin çizimi :



$$A = A_0, \quad B = B_0, \quad H = \frac{M_{0G}}{f}$$

$$M_m = M_{0m} - H \times y_m$$

$$T_m = T_{0m} \times \cos \varphi_m - H \times \sin \varphi_m$$

$$N_m = -T_{0m} \times \sin \varphi_m - H \times \cos \varphi_m$$

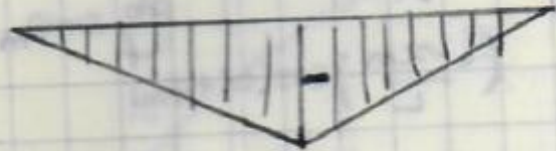
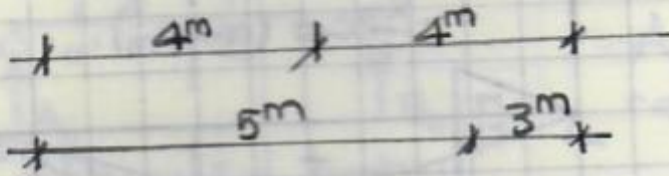
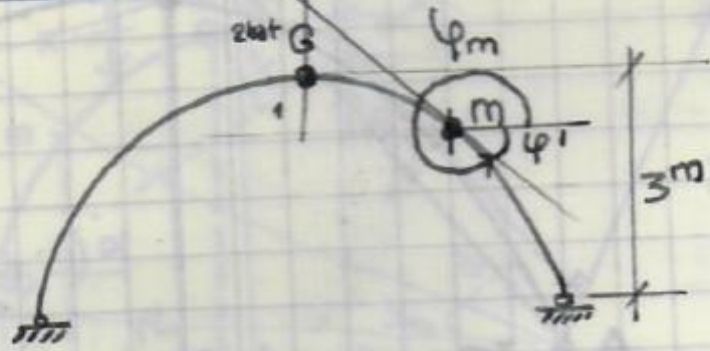
A, B, H, M_m, T_m, N_m : Üç mafsallı sistemin mesnet tepkileri ve kesit zorları tesir çizgilerini,

$A_0, B_0, M_{0G}, M_{0m}, T_{0m}$: Aynı açıklıklı basit kirişin mesnet tepkileri ve kesit zorları tesir çizgilerini,

$f, y_m, \cos \varphi_m, \sin \varphi_m$: Üç mafsallı sisteme ve m kesitine ait geometrik sayısal büyüklükleri göstermektedir.

Üç mafsallı sistemlerde sabit yüklerin düşey olması özel hali için elde edilmiş olan ifadeler sistem üzerinde hareket etmekte olan 1 kN luk düşey kuvvet için de aynen geçerlidir.

UYGULAMA



$$\frac{ab}{lf} = \frac{4 \cdot 4}{8 \cdot 3} = 0.667$$

$$Y = \frac{4f}{L^2} x(L-x)$$

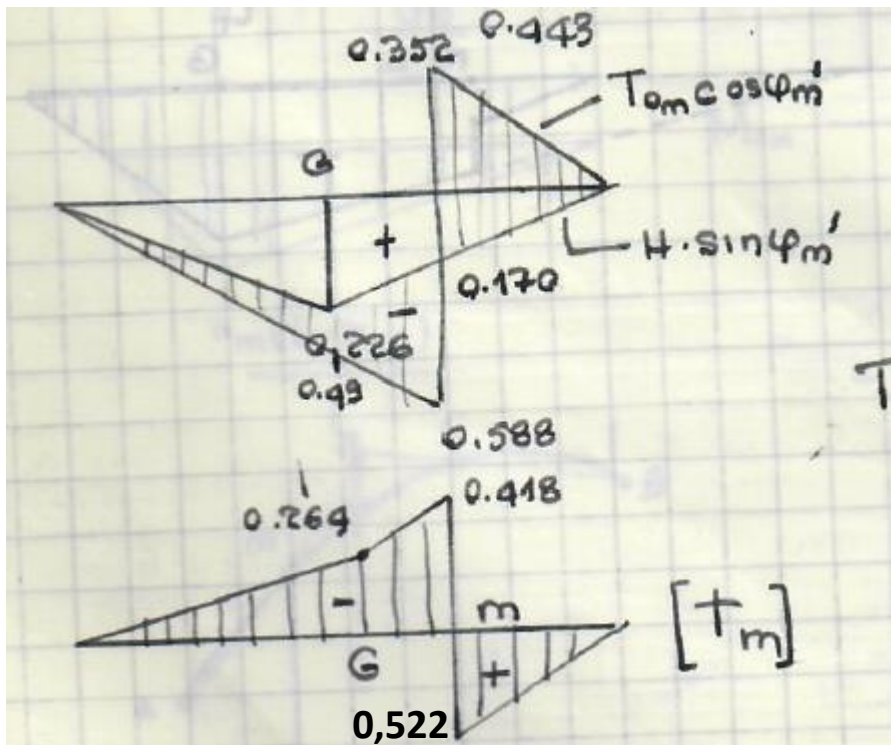
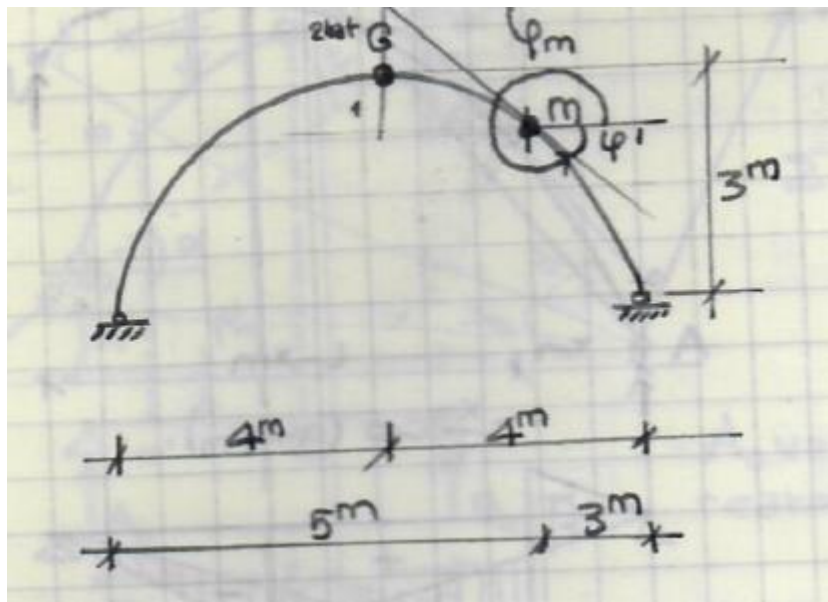
M_m T_m N_m tesir çizgileri

$$M_m = M_{0m} - H Y_m$$

$$x_m = 5m \quad Y_m = \frac{4 \times 3}{8^2} \cdot 5 \cdot 3 = 2.81m$$

$$H = \frac{M_{0c}}{f}$$

H tesir çizgisi



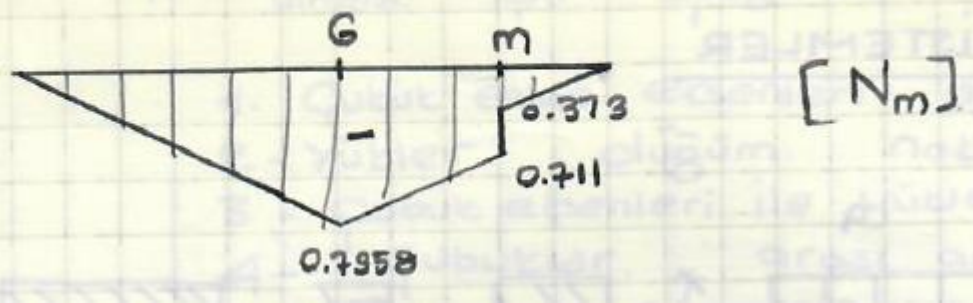
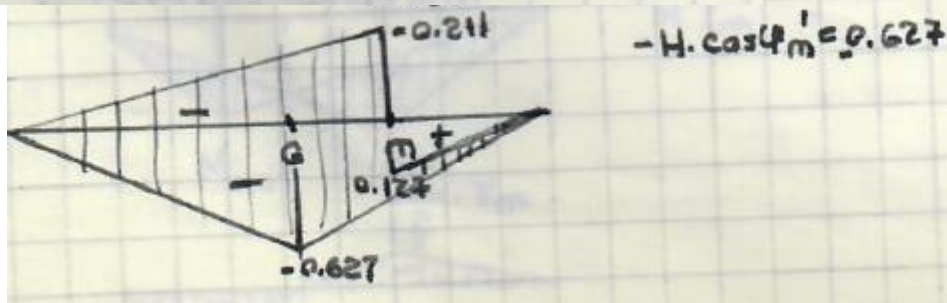
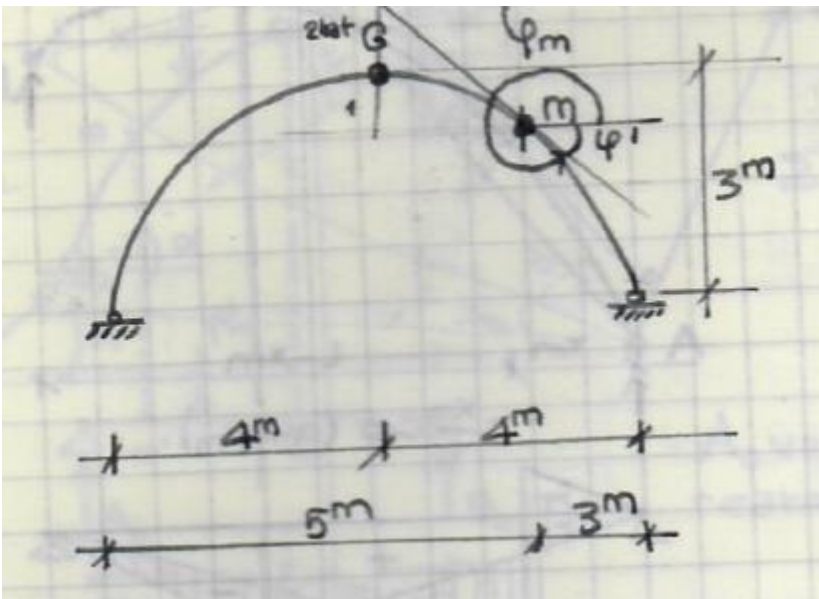
$$T_m = T_{om} \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{0.19 \times 2}{1} = 0.380$$

$$\cos \varphi'_m = 0.94$$

$$\sin \varphi'_m = 0.338$$

$$T_m = T_{om} \cos \varphi'_m + H \sin \varphi'_m$$



$$H \cdot \sin \varphi'_m$$

$$0.667 \times 0.338 = 0.226$$

$$N_m = - [T_{0m} \sin \varphi_m + H \cdot \cos \varphi_m]$$

$$N_m = T_{0m} \sin \varphi'_m - H \cdot \cos \varphi'_m$$

Sabit yüklerin düşey olması halinde kafes sistemin çubuk kuvvetlerini aynı açıklıklı dolu gövdeli sistemin $(M)_o$, $(T)_o$ kesit zorlarına bağlı olarak veren ifadeler, sistem üzerinde hareket eden 1 kN luk düşey kuvvet için de aynen geçerlidir. Ancak bu durumda

örneğin $O_i = -\frac{(M_o)_o}{r_o}$ ifadesinde

O_i : Kafes sistemin O_i çubuk kuvveti tesir çizgisini,

$(M_o)_o$: Aynı açıklıklı dolu gövdeli sistemin o kesitindeki eğilme momenti tesir çizgisini,

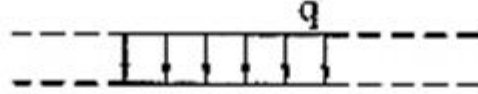
r_o : Kafes sistemin geometrisine bağlı sabit bir büyüklüğü göstermektedir.

Not :

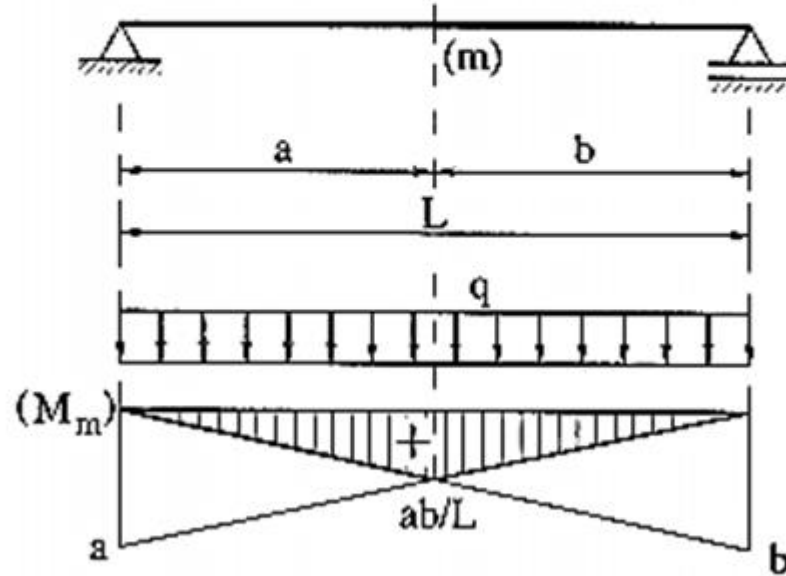
- 1) Kafes sistemlerde daima dolaylı yükleme sözkonusu olduğundan tesir çizgilerinde düzeltme yapılmalıdır. Bu düzeltme işlemi, yapılan kesimin iki yanındaki enlemeler arasında yapılmalıdır.
- 2) Tesir çizgilerinin ifadeleri her kafes sistem için o sistemin özelliklerine bağlı olarak ayrı ayrı elde edilmelidir.

MAKSİMUM EĞİLME MOMENTLERİNİN HESABI

I. Tip hareketli yük :



I. Tip hareketli yükün tüm sistemi kaplayacak şekilde yüklenmesi halinde m kesitinde maksimum eğilme momenti meydana gelir.

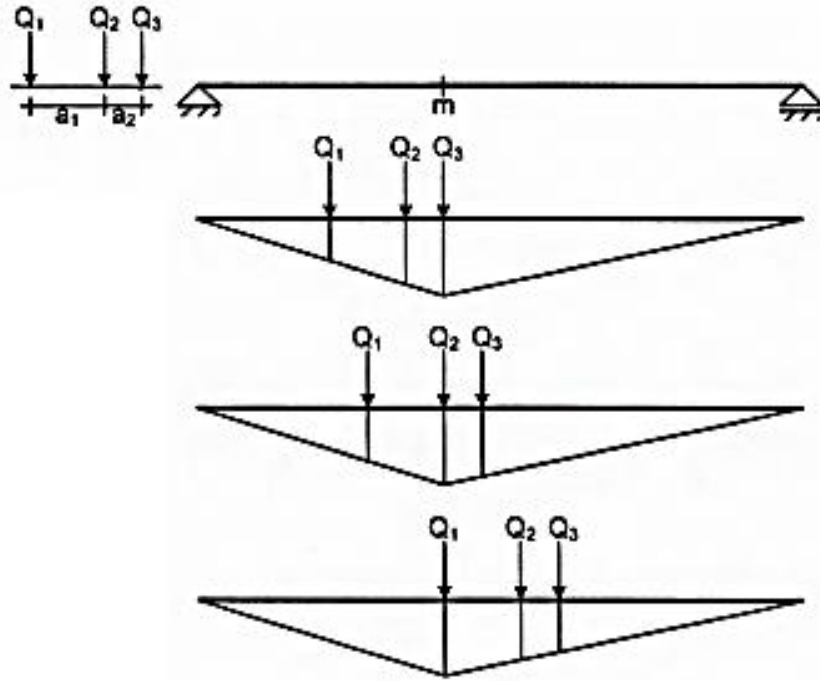


$$\text{maks}M_m = q \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{ab}{L} \times L \right) = \frac{1}{2} \times q \times a \times b \quad \Rightarrow \quad \left(a = b = \frac{L}{2} \rightarrow \text{maks}M_m = \frac{qL^2}{8} \right)$$

II. Tip Hareketli Yük (Yük Katanı):

Bu yük hatırlanacağı üzere, şiddetleri ve ara uzaklıkları sabit olan tekil yüklerden oluşan hareketli yük tipidir. Verilmiş bir m kesitinde;

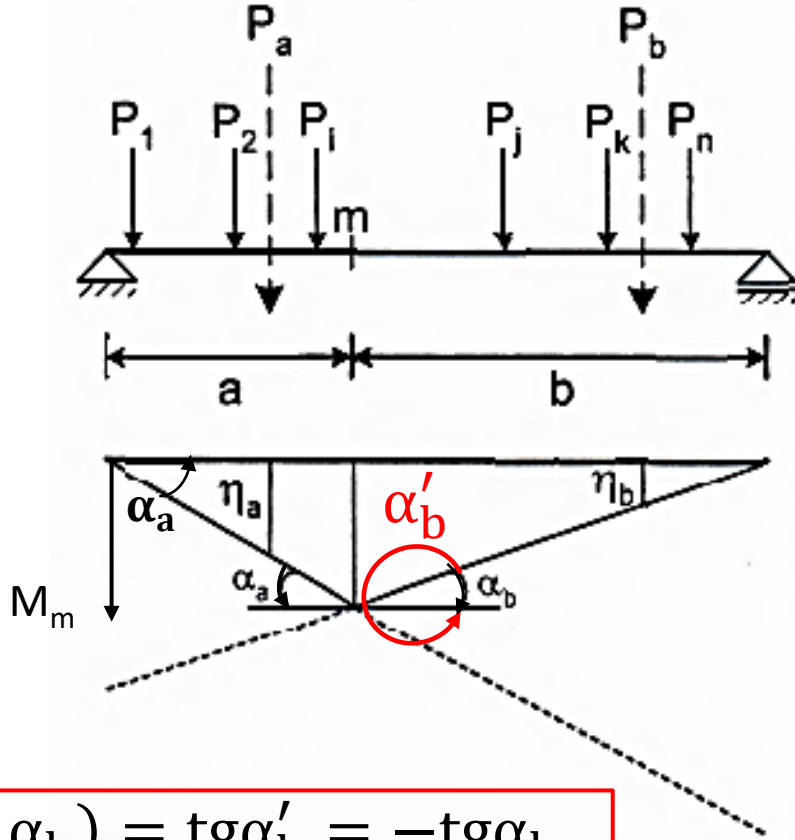
Bu tip yüklemde tekil kuvvetlerin her biri sırasıyla tesir çizgisinin maksimum (veya minimum) ordinatı üzerine etki ettirilerek büyüklükler hesaplanır. En elverişsiz olanı dikkate alınır.



En elverişsiz olan değer $\max M_m$ olarak alınır.

$$M_m = \sum Q_i \eta_i$$

Yapı sistemi üzerinde hareket eden tekil yükler grubunun m kesitinin solunda kalan yüklerin bileşkesine P_a ve sağındaki yüklerin bileşkesine P_b diyelim. Bu bileşke kuvvetlerinin tesir çizgisindeki ordinatlarına da sırasıyla η_a ve η_b olsun. Bu durumda m kesitindeki maxM momentinin değeri;



$$\max M_m = P_a \eta_a + P_b \eta_b$$

Yük katarı yer değiştirdiğinde M momentinin değeri de x'e bağlı olarak değişecektir. Bu değişim şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{dM_m}{dx} = P_a \frac{d\eta_a}{dx} + P_b \frac{d\eta_b}{dx} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

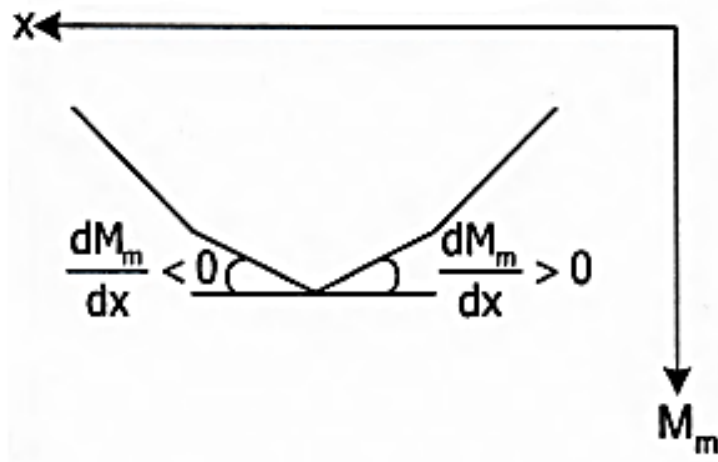
$$\frac{d\eta_a}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_a = \frac{ab}{L} = \frac{b}{L}$$

$$\frac{d\eta_b}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_b = \frac{ab}{L} = -\frac{a}{L}$$

$$P_a \frac{b}{L} + P_b \left(-\frac{a}{L}\right) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_a}{a} < \frac{P_b}{b} \\ \frac{P_a}{a} > \frac{P_b}{b} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(360 - \alpha_b) = \operatorname{tg} \alpha'_b = -\operatorname{tg} \alpha_b$$



$$P_a \frac{b}{L} + P_b \left(-\frac{a}{L}\right) < 0 \quad \frac{P_a}{a} < \frac{P_b}{b}$$

$$> 0 \quad \frac{P_a}{a} > \frac{P_b}{b}$$

$$\frac{dM_m}{dx} < 0 \text{ yani } \frac{P_a}{a} < \frac{P_b}{b}$$

m kesitine gelmeden biraz sonra;

$$\frac{dM_m}{dx} > 0 \text{ yani } \frac{P_a}{a} > \frac{P_b}{b}$$

şartlarını sağlamalıdır.

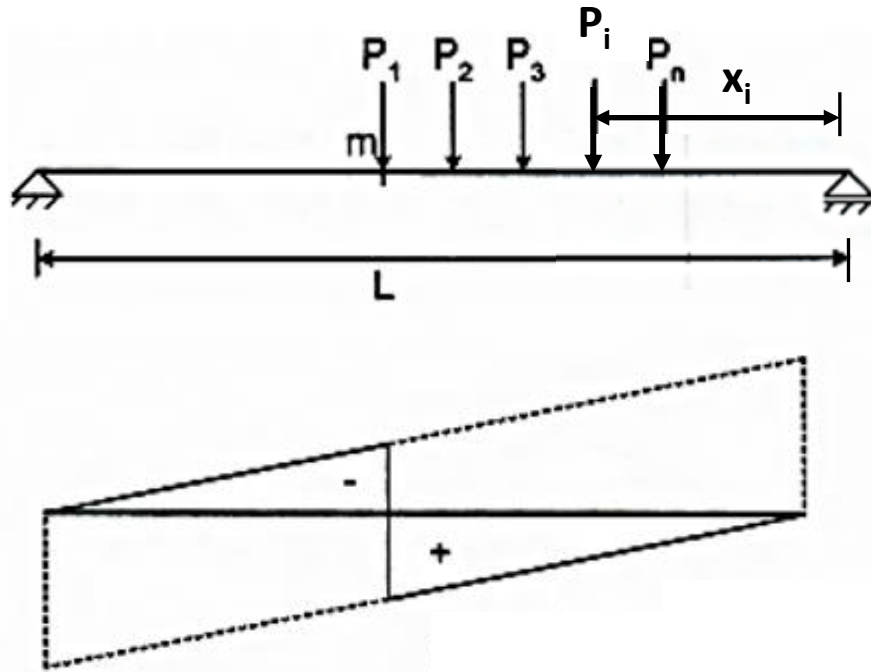
1- Şiddetleri ve ara mesafeleri sabit bir katardan ötürü bir m kesitinde maksimum moment meydana gelebilmesi için m kesiti üzerinde bir tekil kuvvet bulunmalı.

2- Kuvvet kesitin biraz yakın sağında iken $\frac{P_a}{a} < \frac{P_b}{b}$ olmalıdır.

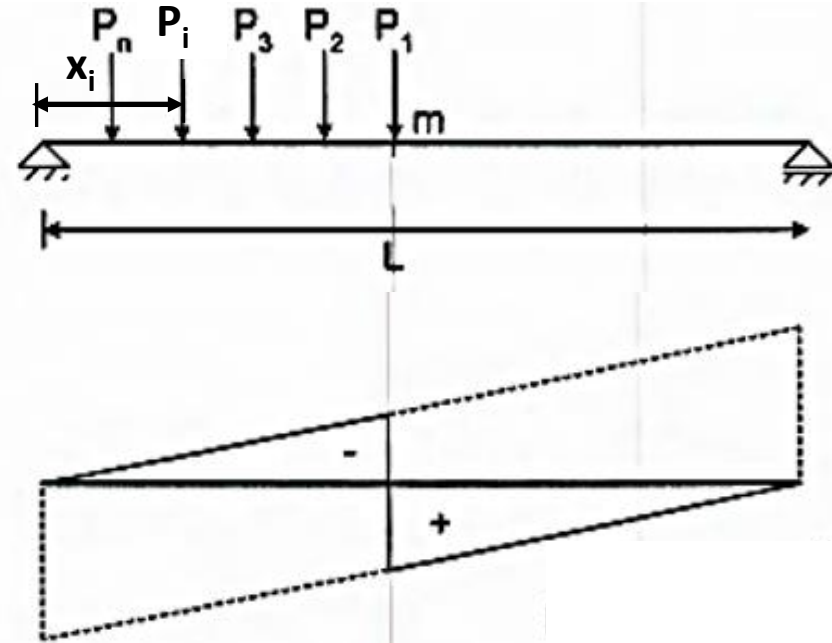
3- Kuvvet kesitin biraz yakın solunda iken $\frac{P_a}{a} > \frac{P_b}{b}$ olmalıdır.

4- Bu kriteriyum tesir çizgisi iki doğru parçasından meydana gelen bütün tesirlerinin maksimumlarının tayininde kullanılır.

Maksimum kesme kuvvetini veren katar durumunda; sağdan sola doğru hareket eden katarın genel olarak ilk kuvveti kesit üzerine gelmektedir. Minimum kesme kuvveti için, soldan sağa hareket etmekte olan katarın ilk kuvveti, genel olarak yine m kesitinin üzerine gelmektedir.



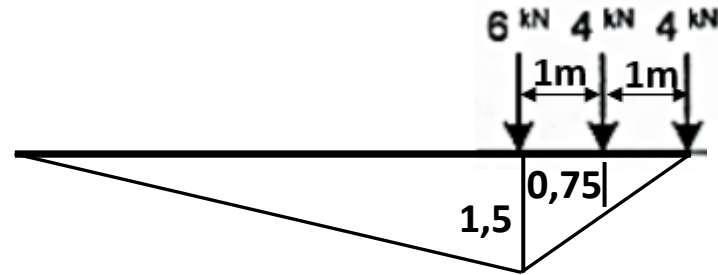
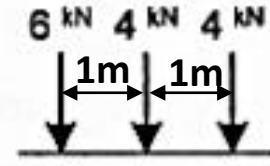
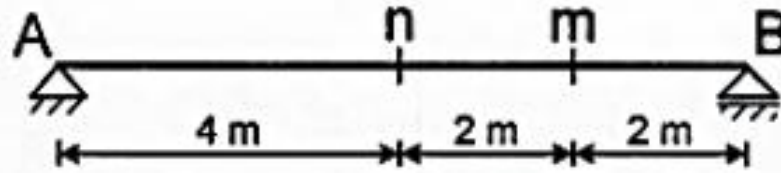
$$\max T_m = \frac{\sum P_i x_i}{L}$$



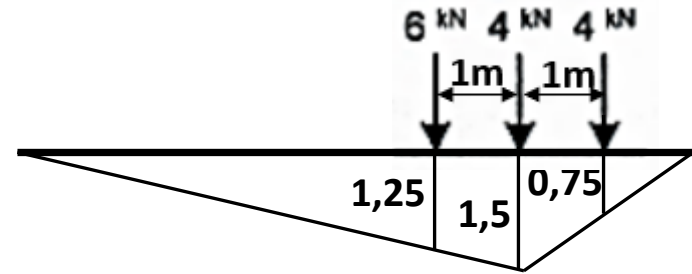
$$\min T_m = \frac{\sum P_i x_i}{L}$$

ÖRNEK:

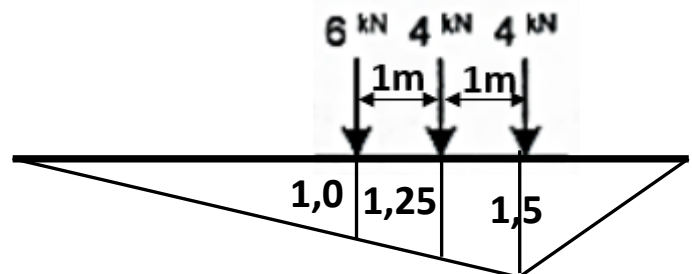
Katar sağdan sola doğru hareket ediyor



$$M_{m1} = 6 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0,75 = 12 \text{ kNm}$$



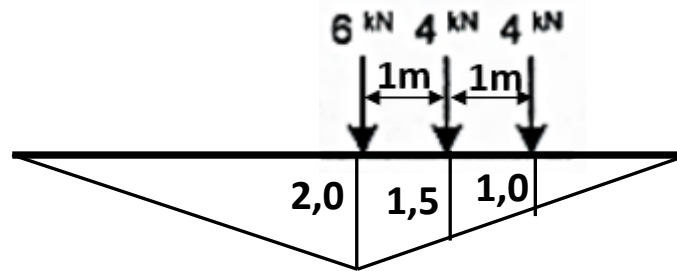
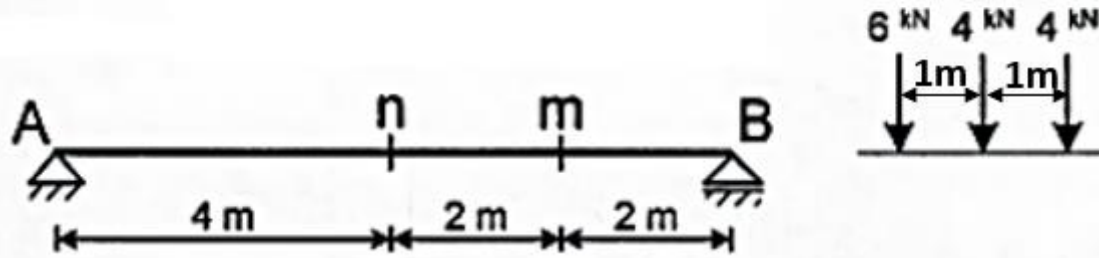
$$M_{m2} = 6 \cdot 1,25 + 4 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0,75 = 16,5 \text{ kNm}$$



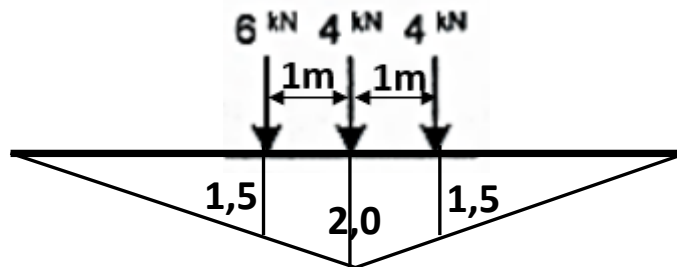
MaxM_m = 17 kNm

$$M_{m3} = 6 \cdot 1,0 + 4 \cdot 1,25 + 4 \cdot 1,5 = 17 \text{ kNm} \quad \checkmark$$

ÖRNEK: Katar sağdan sola doğru hareket ediyor

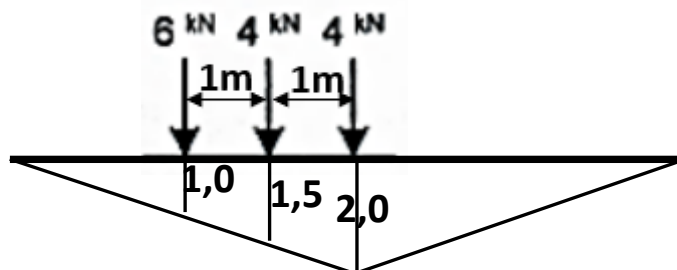


$$M_{n1} = 6 \cdot 2,0 + 4 \cdot 1,5 + 4 \cdot 1,0 = 22 \text{ kNm}$$



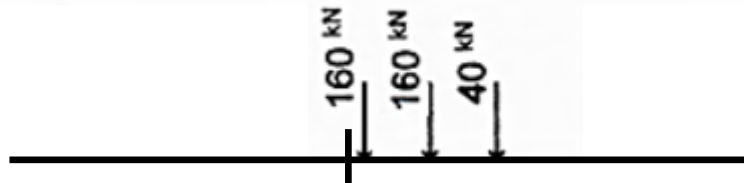
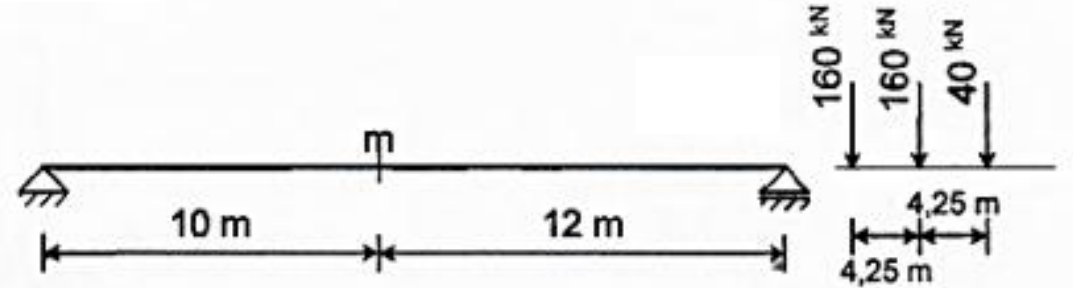
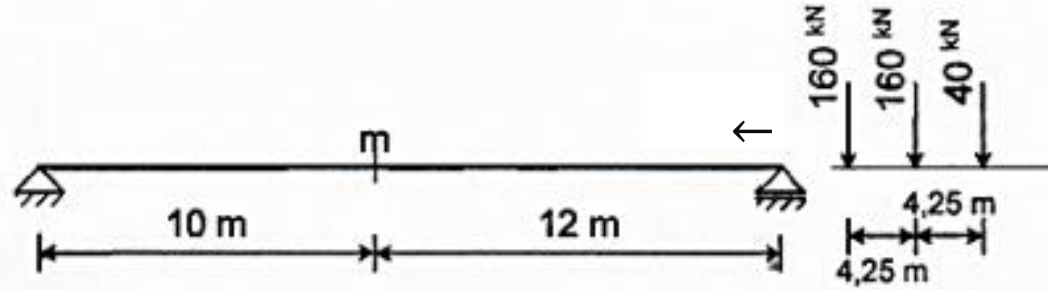
$$M_{n2} = 6 \cdot 1,5 + 4 \cdot 2,0 + 4 \cdot 1,5 = 23 \text{ kNm}$$

$$\text{Max}M_n = 23 \text{ kNm}$$

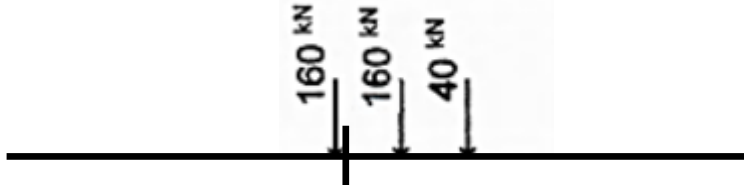


$$M_{n3} = 6 \cdot 1,0 + 4 \cdot 1,5 + 4 \cdot 2,0 = 20 \text{ kNm}$$

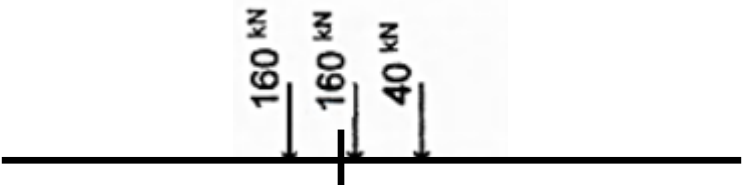
ÖRNEK: Katar soldan sağa doğru hareket ediyor



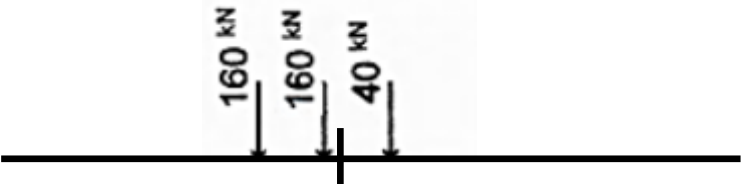
$$\frac{0}{10} < \frac{360}{12}$$



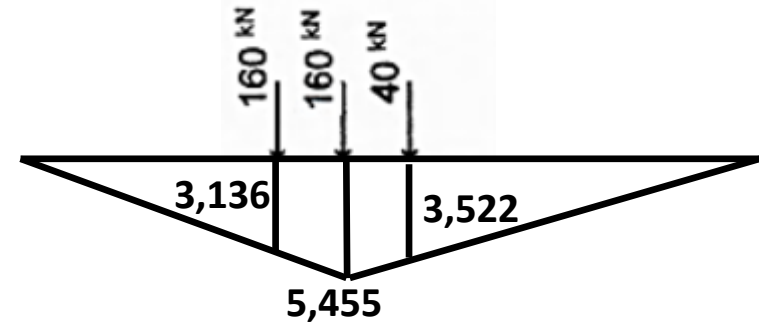
$$\frac{160}{10} < \frac{200}{12} \text{ sağlamadı}$$



$$\frac{160}{10} < \frac{200}{12}$$

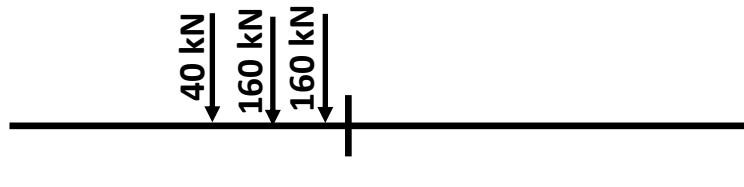
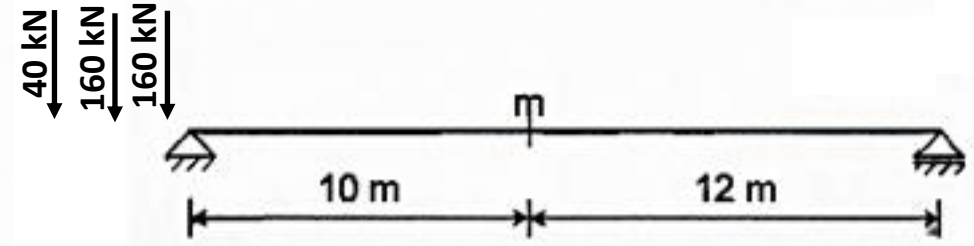
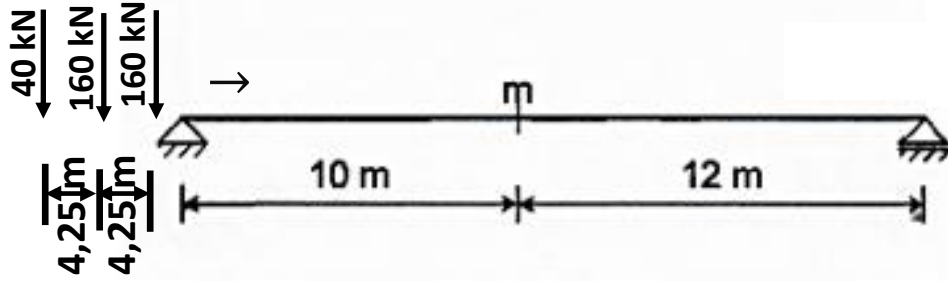


$$\frac{320}{10} > \frac{40}{12} \text{ sağladı } \checkmark$$

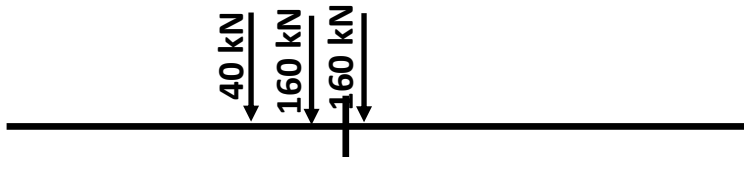


$$MaxM_m = 160 \cdot 3,136 + 160 \cdot 5,455 + 40 \cdot 3,522 = 1515,48 \text{ kNm}$$

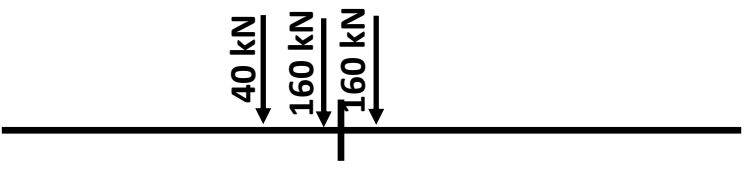
Katar sağdan sola doğru hareket ediyor



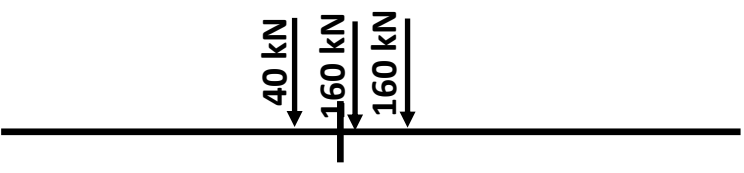
$$\frac{360}{10} > \frac{0}{12}$$



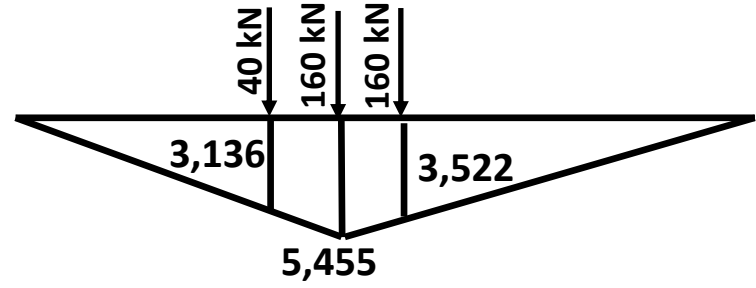
$$\frac{200}{10} > \frac{160}{12} \text{ sağlamadı}$$



$$\frac{200}{10} > \frac{160}{12}$$



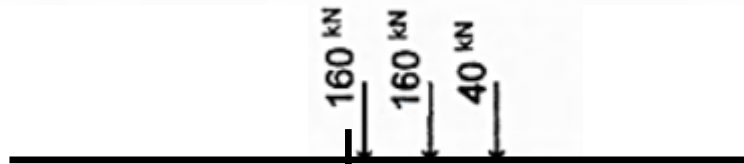
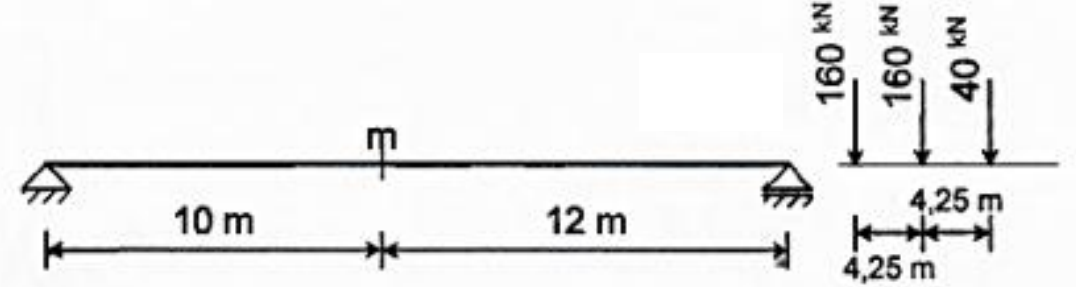
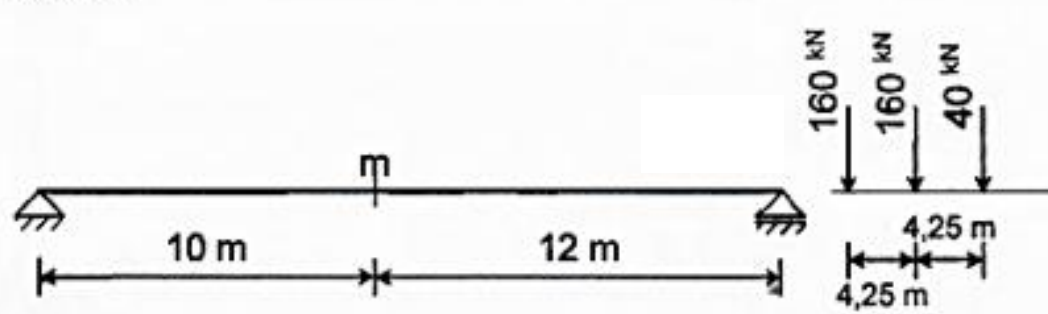
$$\frac{40}{10} < \frac{320}{12} \text{ sağladı } \checkmark$$



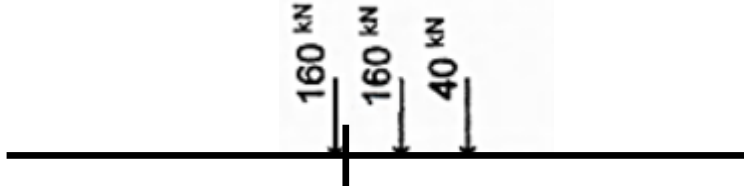
$$\text{Max}M_m = 40 \cdot 3,136 + 160 \cdot 5,455 + 160 \cdot 3,522 = 1561,92 \text{ kNm}$$

$$\text{Max}M_m = 1561,92 > 1515,48 \text{ kNm}$$

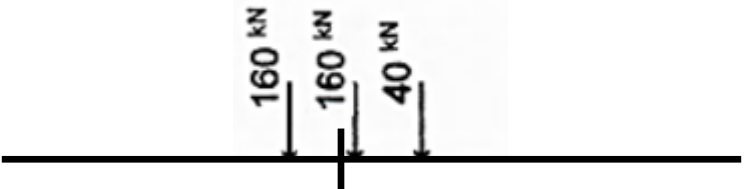
ÖRNEK:



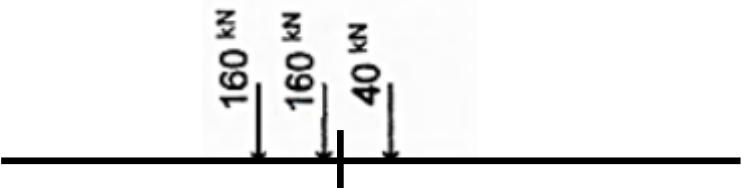
$$\frac{0}{10} < \frac{360}{12}$$



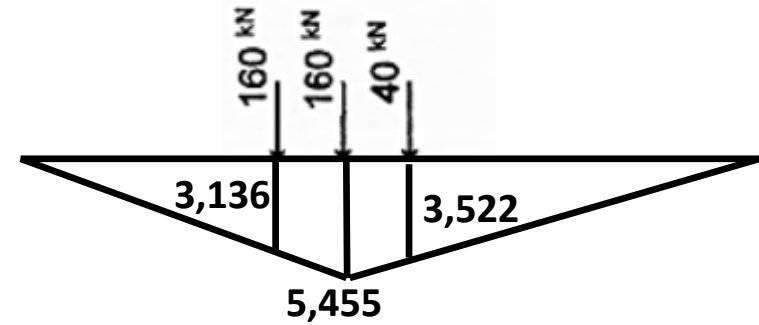
$$\frac{160}{10} > \frac{240}{12} \text{ sağlamadı}$$



$$\frac{160}{10} < \frac{240}{12}$$



$$\frac{3200}{10} > \frac{40}{12} \text{ sağladı } \checkmark$$



$$\text{Max}M_m = 160 \cdot 3,136 + 160 \cdot 5,455 + 40 \cdot 3,522 = 1515,48 \text{ kNm}$$

III. Tıp Hareketli Yük:

Bu yük durumunda m kesitinde momenti maksimum yapan katar durumu iki farklı şekilde incelenir;

a) Birincisinde, maksimum moment tekil yükler kesit üzerine getirilerek önceden bahsedilen

kriterlere göre belirlenir. Yani, yük gruplarının dengesi kesitin biraz yakın sağında $\frac{P_a}{a} < \frac{P_b}{b}$,

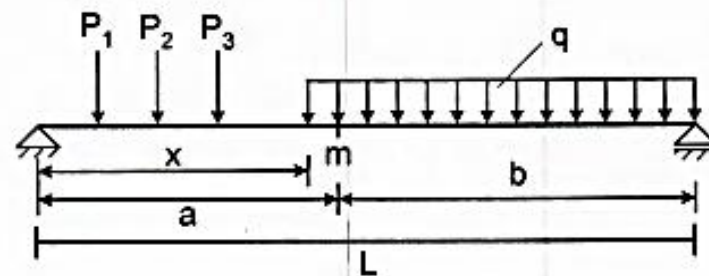
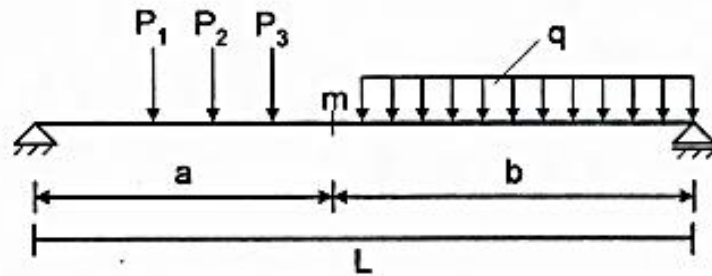
kesitin biraz yakın solunda ise $\frac{P_a}{a} > \frac{P_b}{b}$ kriterlerini sağlamalıdır.

b) İkinci durumda ise, üniform yayılı yükün m kesitini ne kadar geçtiğinin, yani x mesafesinin

bulunmasıyla belirlenir. $\frac{dM_m}{dx} = P_a \frac{d\eta_a}{dx} + P_b \frac{d\eta_b}{dx} = 0$

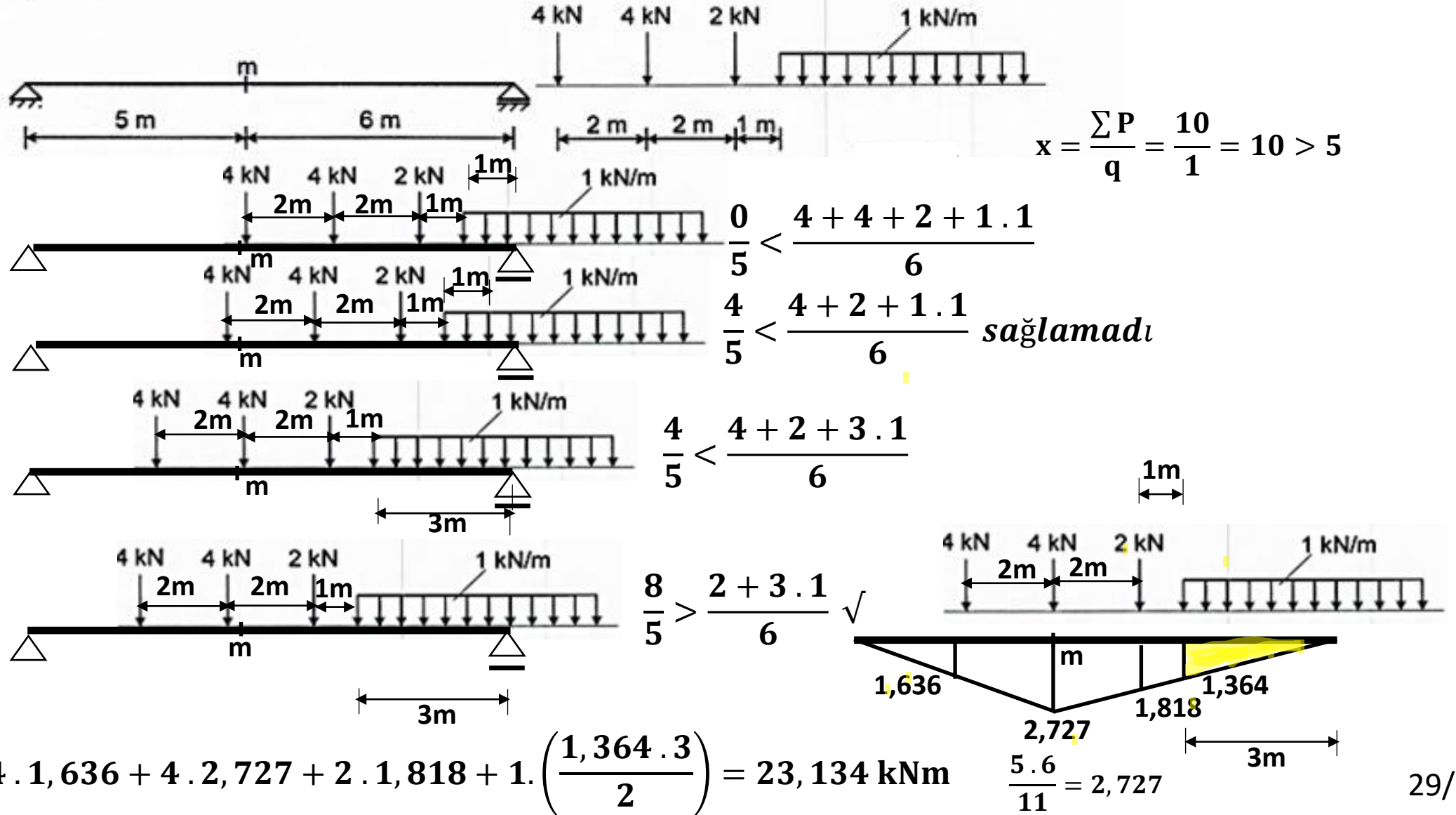
$$\frac{P_a}{a} = \frac{P_b}{b} \quad \frac{\sum P + q(a-x)}{a} = \frac{qb}{b} \Rightarrow x = \frac{\sum P}{q}$$

olduğu zaman m kesitinde maksimum moment meydana gelir.

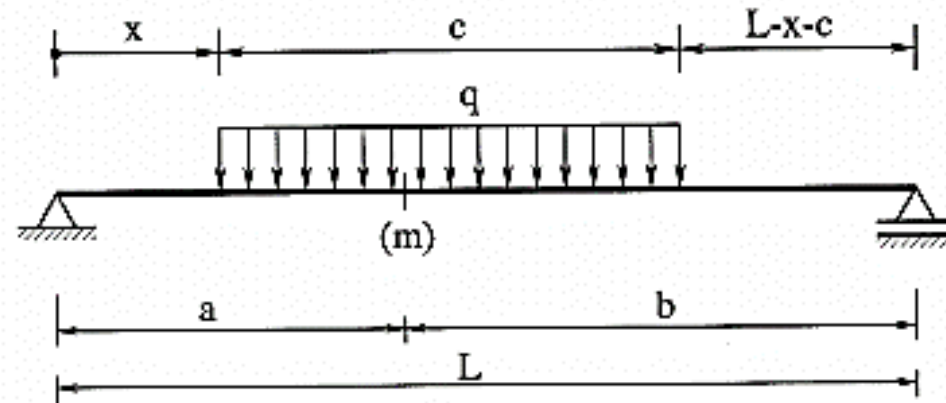


ÖRNEK:

Katar sağdan sola doğru hareket ediyor



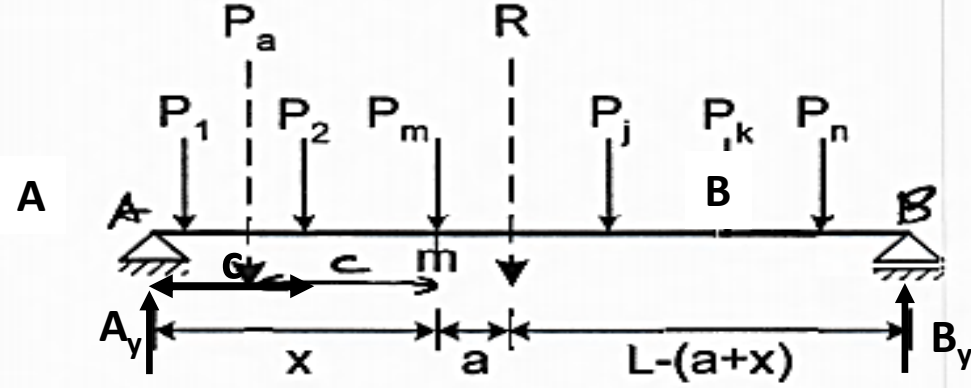
IV. Tip hareketli yük



Ölçüt :

$$\frac{P_a}{a} = \frac{P_b}{b} \Rightarrow \frac{q(a-x)}{a} = \frac{q(c+x-a)}{b} \Rightarrow x = \frac{a(L-c)}{L}$$

Her kesit için bulunan maksimum eğilme momenti değeri, kesit hizalarında ordinat alınarak elde edilen diyagrama maksimum eğilme momenti diyagramı adı verilir. Bu diyagramdaki en büyük değere de maksimumların maksimumu adı verilir ve $\max M_{\max}$ ile gösterilir.



$\max M_{\max}$ momentinin meydana geldiği m kesitinin A mesnetine olan mesafesine (x) diyelim. Kiriş üzerindeki yüklerin bileşkesi (R) ise;

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = R$$

m kesitinin solunda kalan $P_1 + P_2 = P_a$ ve m kesitine uzaklığı c olsun. P_3 yükü de m kesitinde tehlikeli durumu meydana getirsin ve bu yüke P_m diyelim. Şimdi m kesitine göre moment alalım.

$M_m = A_y x - P_a c$ A_y mesnet reaksiyonunu hesaplayıp bulunan değeri M_m de yerine yazarsak

$$A_y = \frac{R}{L}(L - a - x)$$

$$M_m = \frac{R}{L}(L - a - x)x - P_a c$$

$$M_m = \frac{R}{L}(L - a - x)x - P_a c$$

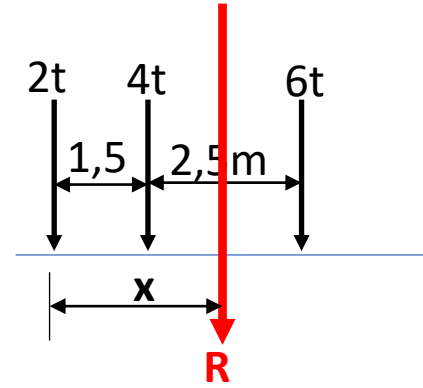
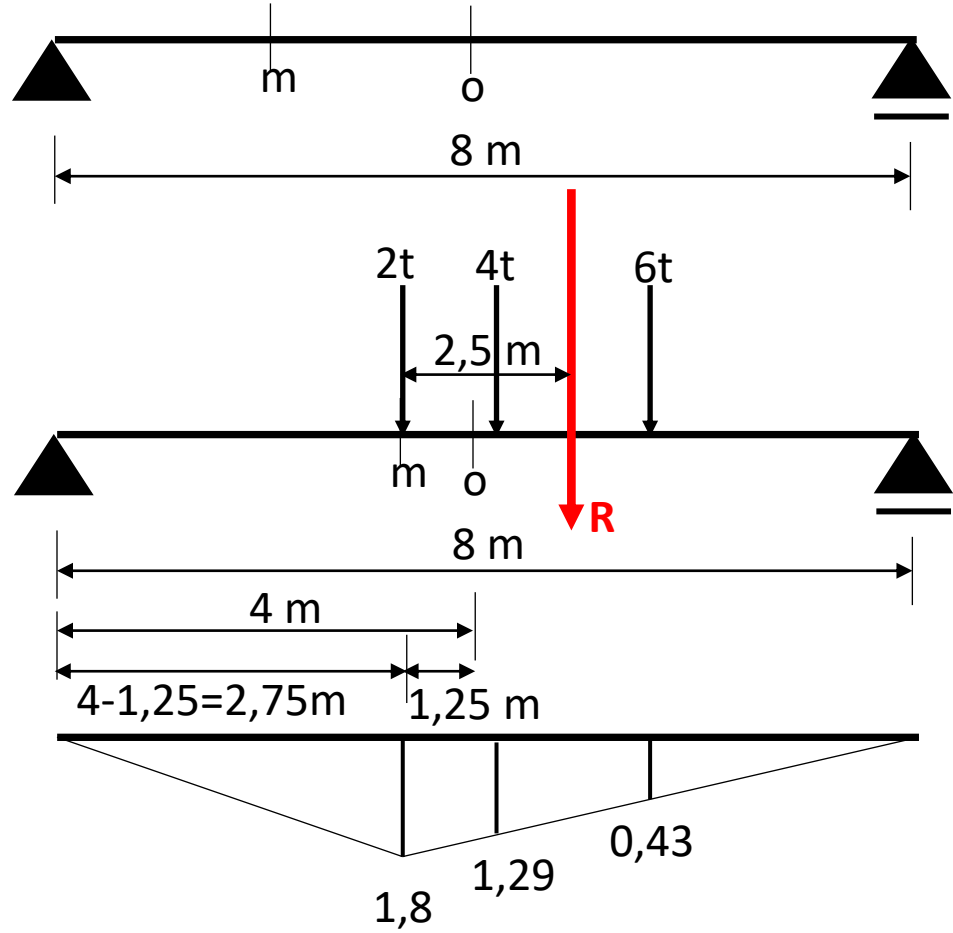
Moment denkleminin türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse maksimum momentin yeri belirlenir

$$\frac{dM_m}{dx} = \frac{R}{L}(L - a - 2x) = 0$$

$$x = \frac{L}{2} - \frac{a}{2}$$

Bileşke ile seçilen kuvvetin arasındaki mesafenin ortası kirişin orta noktası ile çakıştığı zaman seçilen kuvvetin altındaki noktada moment maksimum olur.

ÖRNEK

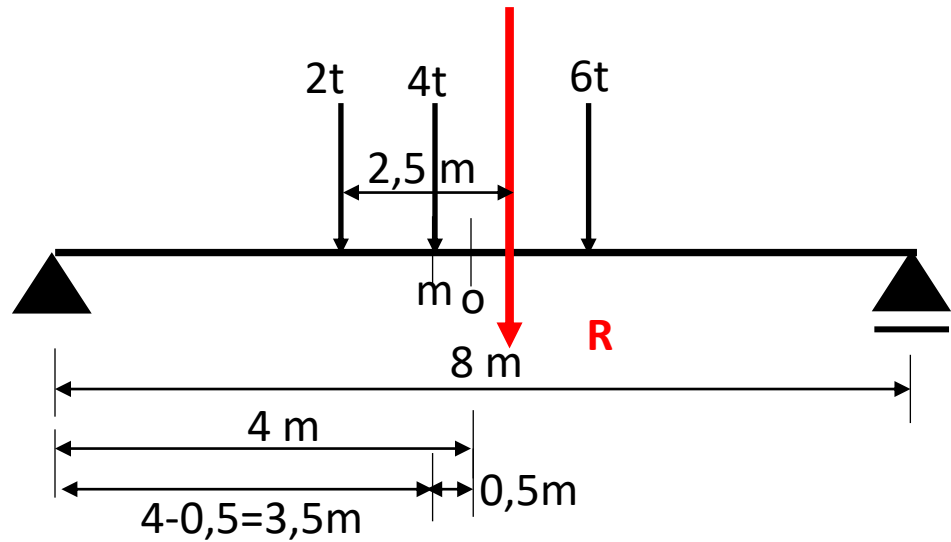


$\max M_{\max}$ meydana gelen noktaları ve $\max M_{\max}$ ları tayin ediniz

$$x = \frac{2 * 0 + 4 * 1,5 + 6 * 4}{12} = 2,5 \text{ m}$$

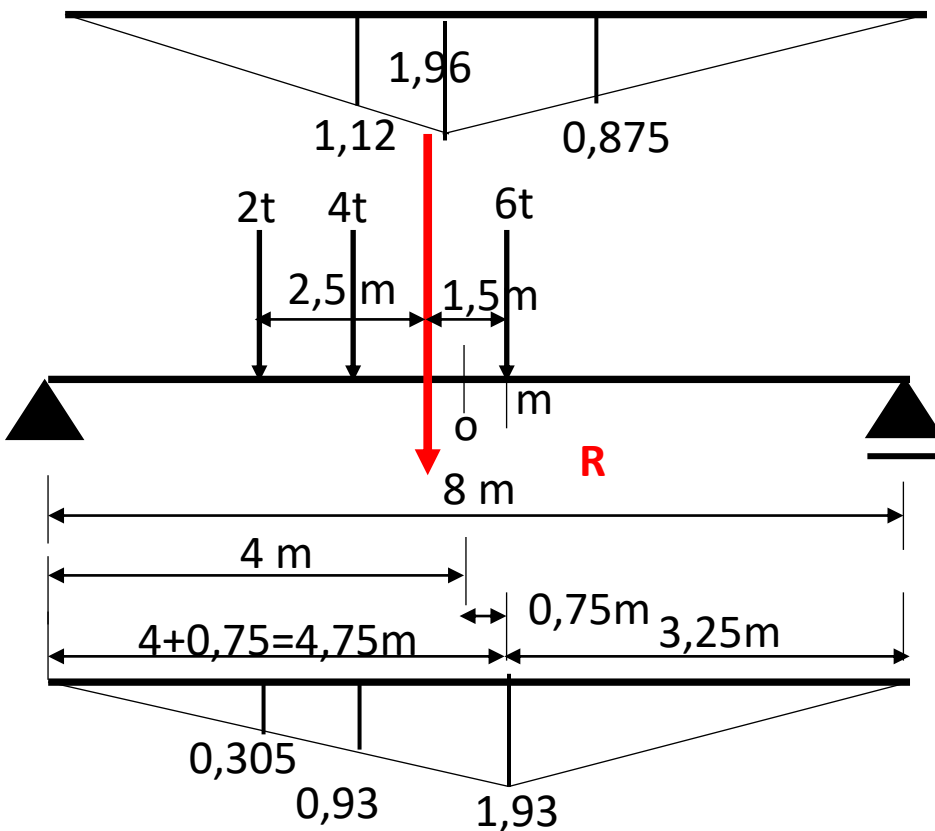
2 tonluk kuvvet ile bileşkenin orta noktası kirişin ortasında iken

$$\max M_{\max} = 2 * 1,8 + 4 * 1,29 + 6 * 0,43 = 11,34 \text{ tm}$$



4 tonluk kuvvet ile bileşkenin orta noktası kirişin ortasında iken

$$\max M_{\max} = 2 * 1,12 + 4 * 1,96 + 6 * 0,875 = 15,33 \text{ tm}$$



4 tonluk kuvvet ile bileşkenin orta noktası kirişin ortasında iken

$$\max M_{\max} = 2 * 0,305 + 4 * 0,93 + 6 * 1,93 = 15,93 \text{ tm}$$

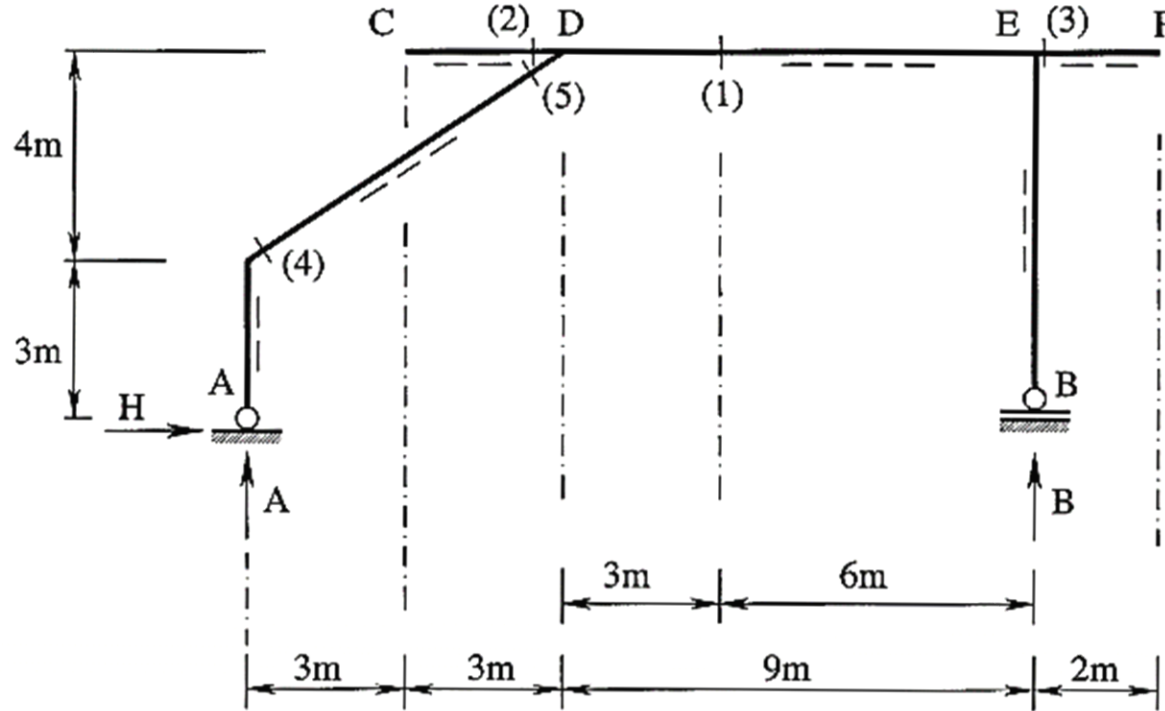
ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

PROBLEM 10.1

Şekil 10.1 de verilen sistemde,

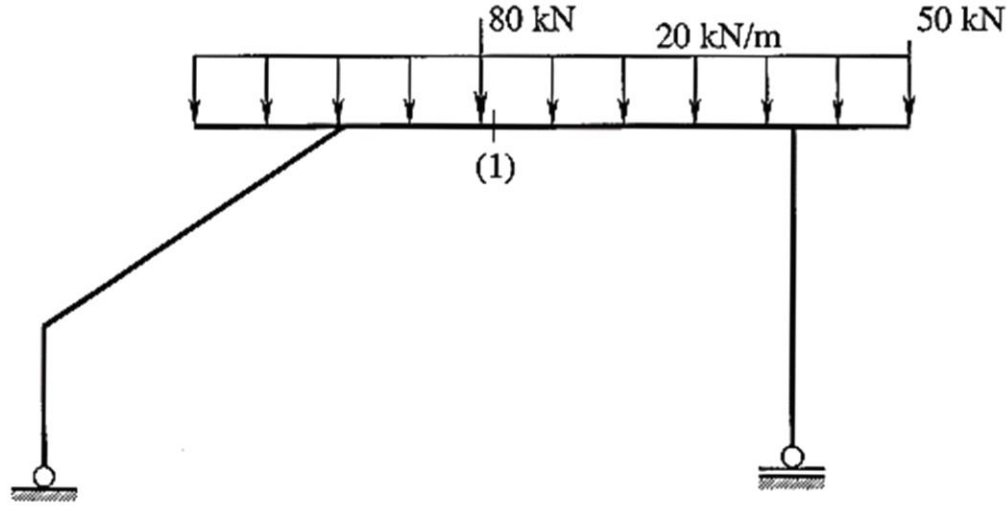
a) A, B, H, M_1 , T_1 , T_2 , M_3 , N_4 ve M_5 tesir çizgilerini çiziniz.

Not : 1 kN luk düşey kuvvet C-D-E-F arasında dolaşmaktadır



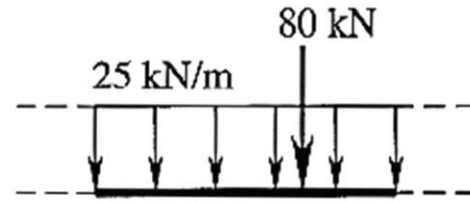
Şekil 10.1: Yapı sistemi

b) Şekil 10.1a da verilen sabit yükler için M_1, T_1 kesit zorlarını hesaplayınız.



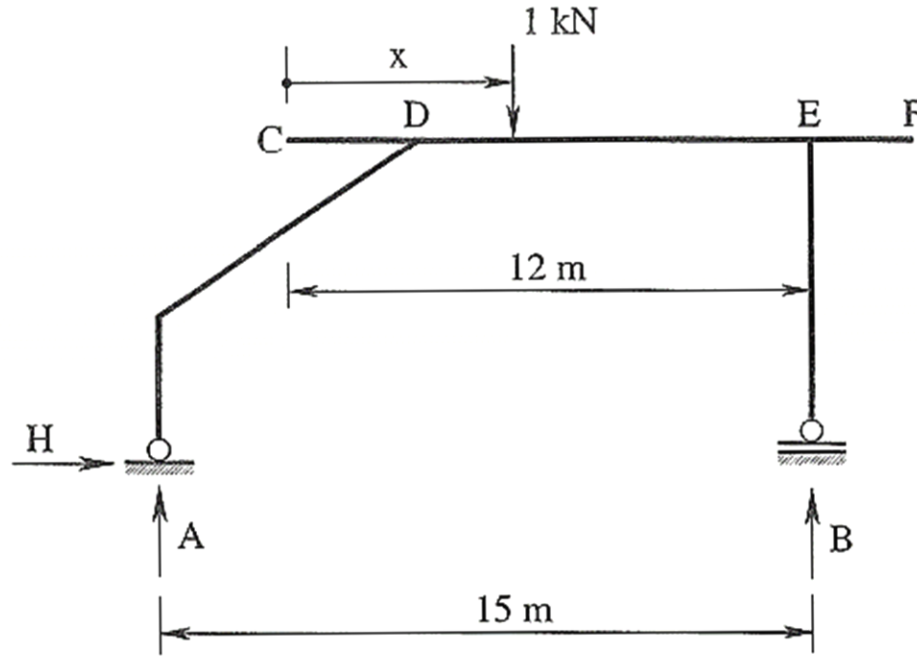
Şekil 10.1a: Yapı sistemine etkiyen sabit yükler

c) Şekil 10.1b de verilen hareketli yük için M_1, T_1 kesit zorlarının maksimum ve minimum değerlerini hesaplayınız.



Şekil 10.1b: Hareketli yük

Mesnet tepkilerine ait tesir çizgisi ifadelerinin bulunması :



Şekil 10.1c: 1 kN luk hareketli düşey yük

$$(\cup+) \Sigma M_B = 0 \quad A \times 15.00 - 1 \times (12 - x) = 0 \quad \Rightarrow A = \frac{12 - x}{15} \checkmark$$

$$(\cup+) \Sigma M_A = 0 \quad -B \times 15.00 + 1 \times (3 + x) = 0 \quad \Rightarrow B = \frac{3 + x}{15} \checkmark$$

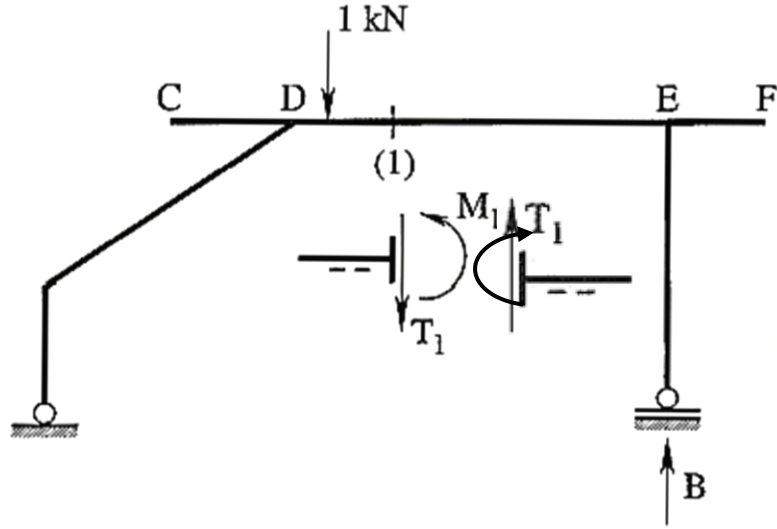
$$\text{Kontrol: } (\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \text{ olmalıdır.} \quad (\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad H = 0$$

$$\Sigma F_y = \frac{12 - x + 3 + x}{15} - 1 = \frac{15}{15} - 1 = 0 \checkmark$$

- ✓ (1) kesitindeki M_1, T_1 eğilme momenti ve kesme kuvveti tesir çizgisi ifadelerinin elde edilmesi :

➤ 1 kN luk düşey kuvvet C-(1) arasında hareket ederken, Şekil 10.1d;

(1) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin sağında kalan 1 kN luk yükün bulunmadığı parça dikkate alındığında M_1 ve T_1 kesit zorları tesir çizgileri



$$A = \frac{12 - x}{15}$$
$$B = \frac{3 + x}{15}$$

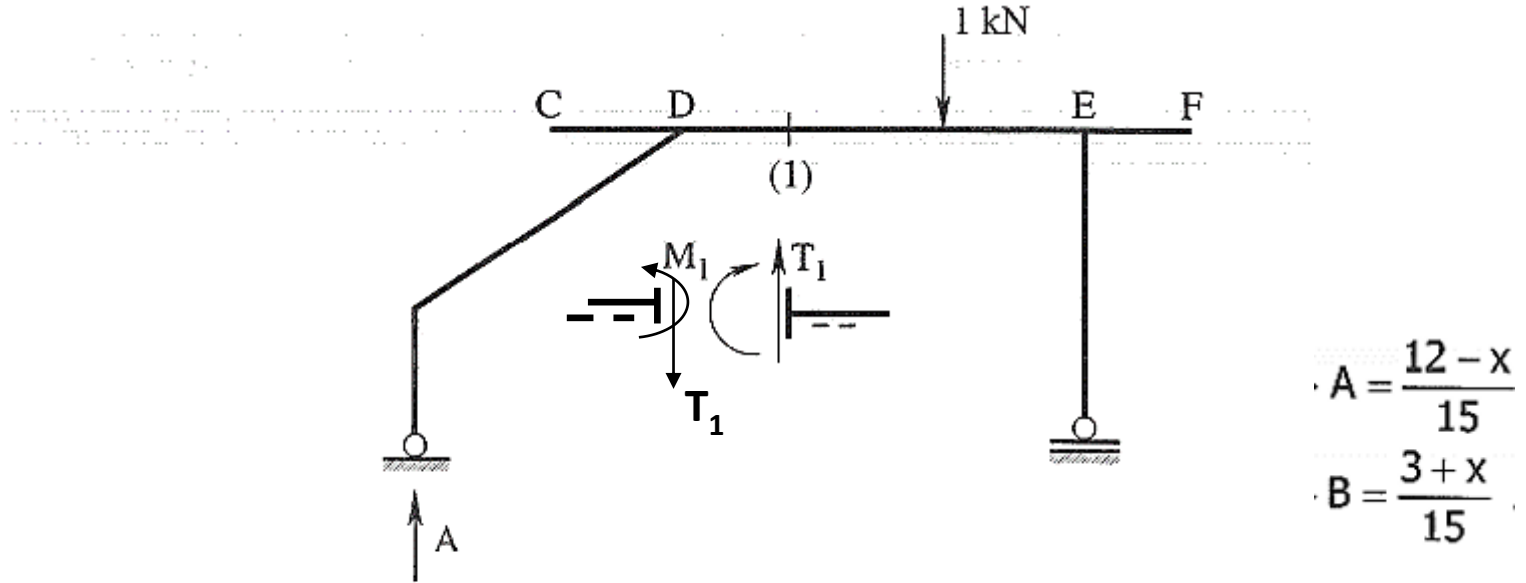
Şekil 10.1d: 1 kN luk düşey kuvvet C-(1) arasında

$$M_1^{ts} = 6 \times B \quad , \quad T_1^{ts} = -B$$

İstenen kesit zorlarına ait tesir çizgilerinin elde edilmesinde, (1) kesitinin solunda kalan parçanın gözönüne alınması durumunda hem A tesir çizgisinin hemde 1 kN düşey kuvvet ve konumunun gözönüne alınması gerekmektedir. Bu durumda, kesit zorları tesir çizgileri, sadece mesnet tepkisi tesir çizgilerine bağlı olarak ifade edilemez.

➤ **1 kN luk düşey kuvvet (1)-F arasında hareket ederken, Şekil 10.1e;**

(1) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin solunda kalan 1 kN luk yükün bulunmadığı parça dikkate alındığında M_1 ve T_1 kesit zorları tesir çizgileri



Şekil 10.1e: 1 kN luk düşey kuvvet (1)-F arasında

$$M_1^{ks} = 9 \times A \quad , \quad T_1^{ks} = A$$

- ✓ (2) kesitindeki M_2 , T_2 eğilme momenti ve kesme kuvveti tesir çizgisi ifadelerinin elde edilmesi :

➤ 1 kN luk düşey kuvvet C-(2) arasında hareket ederken;

(2) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin solunda kalan parça dikkate alındığında

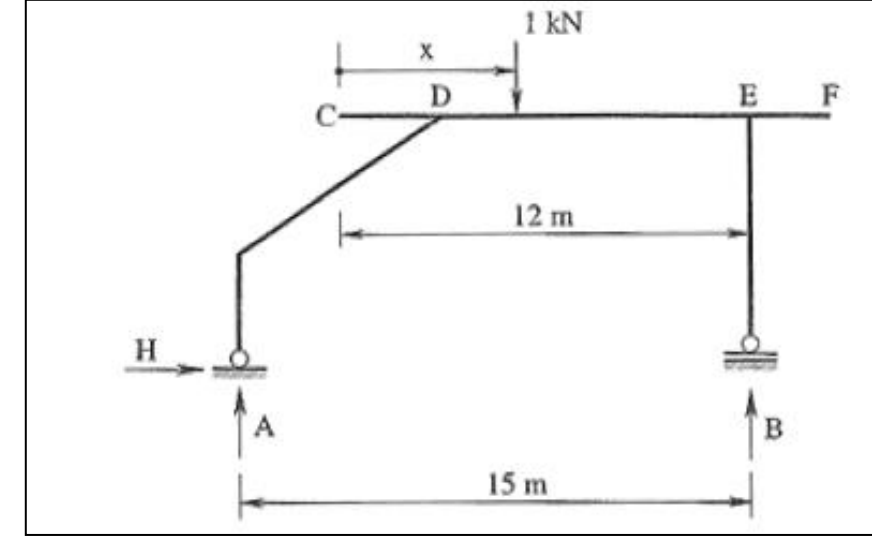
$$T_2^{tc} = -1$$

➤ 1 kN luk düşey kuvvet (2)-F arasında hareket ederken;

(2) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin solunda kalan parça dikkate alındığında

$$T_2^{tc} = 0$$

elde edilir. Böylece, (2) kesitine ait kesme kuvveti tesir çizgisi çizilebilir duruma gelmiştir.



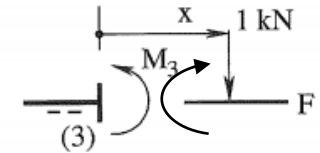
➤ 1 kN luk düşey kuvvet (3)-F arasında hareket ederken;

- ✓ (3) kesitindeki M_3 eğilme momenti tesir çizgisi ifadesinin elde edilmesi :

➤ 1 kN luk düşey kuvvet C-(3) arasında hareket ederken;

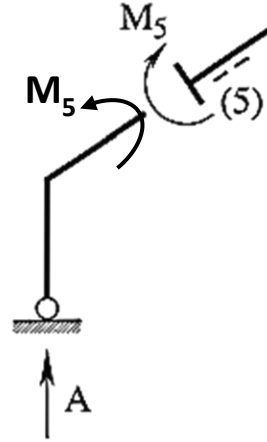
$$M_3^{tc} = 0$$

$$M_3^{tc} = -x$$



✓ (5) kesitindeki M_3 eğilme momenti tesir çizgisi ifadesinin elde edilmesi :

(5) kesitinin, 1 kN luk düşey tekil kuvvetin dolaştığı bölgede bulunmadığına dikkat edilmelidir. Dolayısıyla, bu kesit için kesit zoru tesir çizgilerinin elde edilmesinde 1 kN luk kuvvetin ve konumunun etkisi bulunmamaktadır. Buna göre; 1 kN luk düşey kuvvet C-F arasında hareket ederken, (5) kesitinden kesim yapılarak sözkonusu kesitin altında kalan parça dikkate alındığında

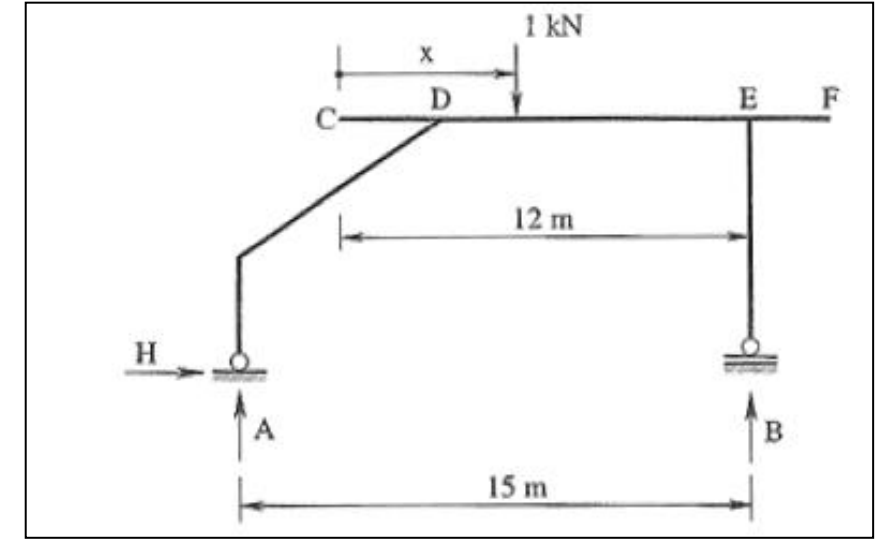


$$A = \frac{12 - x}{15}$$

$$B = \frac{3 + x}{15}$$

$$M_5^{tc} = 6 \times A$$

şeklinde mesnet tepkisine bağlı bir ifade elde edilir.



✓ (4) kesitindeki N_4 normal kuvvet tesir çizgisi ifadesinin elde edilmesi :

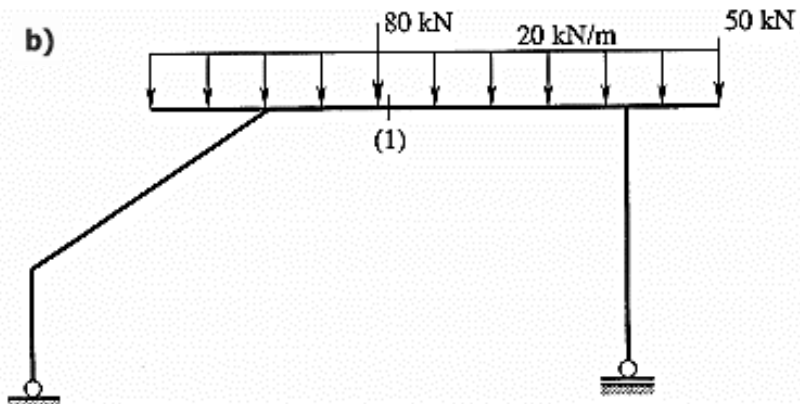
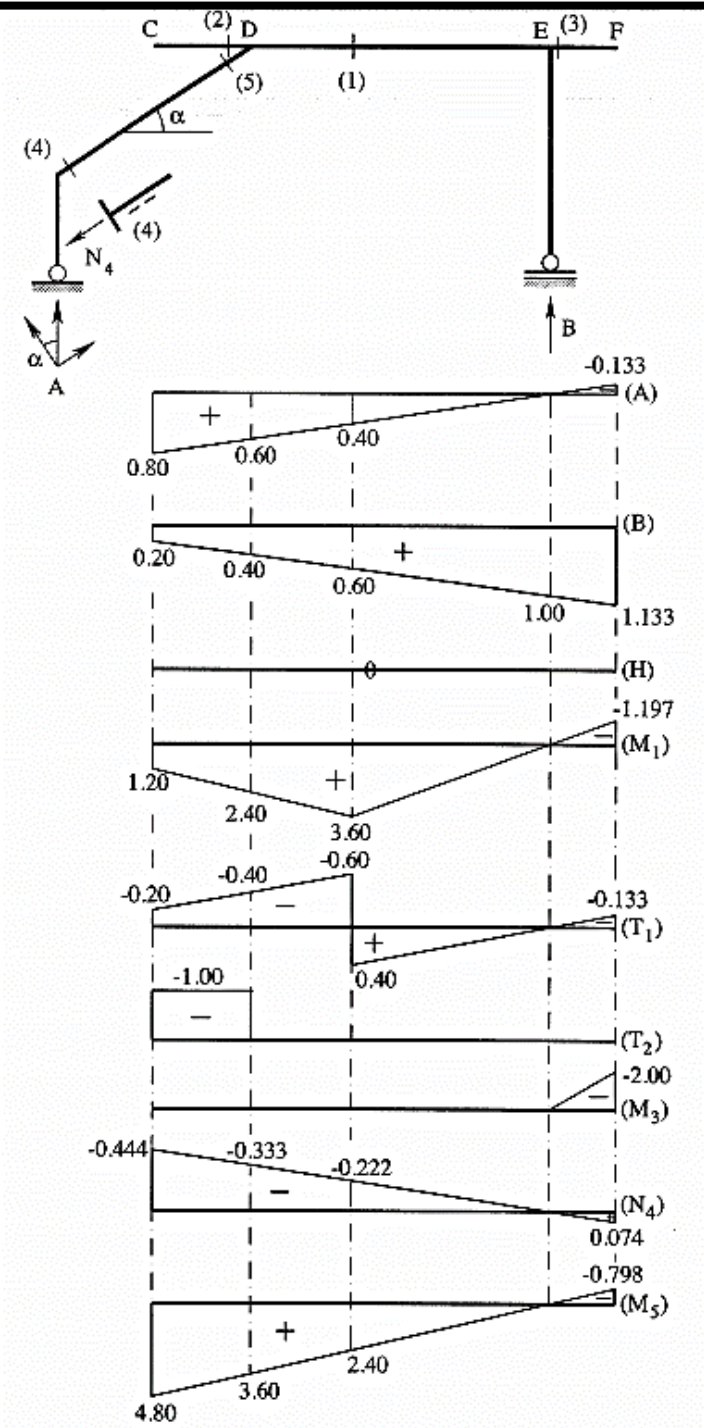
(4) kesitinin de, 1 kN luk düşey tekil kuvvetin dolaştığı bölgede bulunmadığına dikkat edilmelidir. (5) kesiti için ifade edilenler bu kesit için de aynen geçerlidir. (4) kesiti eğik çubuk üzerinde bulunmaktadır. Bu çubuğun yatayla yaptığı α açısı ve bu açığa bağlı olarak hesaplanan trigonometrik büyüklükler

$$\tan \alpha = \frac{4}{6} = 0.6667 \Rightarrow \alpha = 33.691 \Rightarrow [\sin \alpha = 0.5547 \quad , \quad \cos \alpha = 0.8320]$$

dir. Buna göre; 1 kN luk düşey kuvvet C-F arasında hareket ederken, (4) kesitinden kesim yapılarak sözkonusu kesitin altında kalan parça dikkate alındığında

$$N_4^{tc} = -A \times \sin \alpha = -0.5547 \times A$$

ifadesi elde edilir.



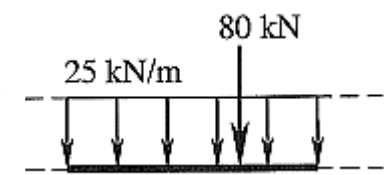
$$M_1 = 20 \times \left(\frac{(1.20 + 3.60)}{2} \times 6 + \frac{3.6 \times 6}{2} - 1.197 \times \frac{2}{2} \right) + 80 \times 3.60 - 50 \times 1.197$$

$$\Rightarrow M_1 = 708.21 \text{ kNm} \checkmark$$

$$T_1 = 20 \times \left((-0.20 - 0.60) \times \frac{6}{2} + 0.40 \times \frac{6}{2} - 0.133 \times \frac{2}{2} \right) - 80 \times 0.60 - 50 \times 0.133$$

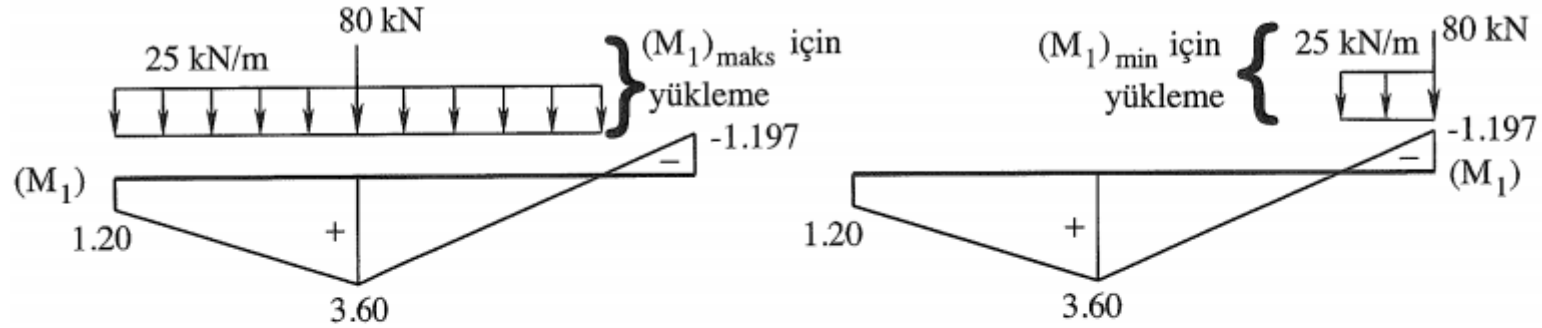
$$\Rightarrow T_1 = -81.31 \text{ kN} \checkmark$$

c) Maksimum kesit zorunun hesabında, yayılı yük kesit zoru tesir çizgisinin pozitif bölgelerine ve tekil yük kesit zoru tesir çizgisinin en büyük pozitif ordinatına etkililir. Daha sonra; yayılı yük etkidiği bölge boyunca tesir çizgisi alanı ile, tekil yük ise etkidiği nokta hizasındaki tesir çizgisi ordinatı ile çarpılır ve elde edilen değerler cebrik olarak toplanıp aranılan maksimum kesit zoru bulunur.



Minimum kesit zorunun hesabında ise, yayılı yük kesit zoru tesir çizgisinin negatif bölgelerine ve tekil yük kesit zoru tesir çizgisinin mutlak değerce en büyük negatif ordinatına etkililir. Daha sonra; yayılı yük etkidiği bölge boyunca tesir çizgisi alanı ile, tekil yük ise etkidiği nokta hizasındaki tesir çizgisi ordinatı ile çarpılır ve elde edilen değerler cebrik olarak toplanıp aranılan minimum kesit zoru bulunur.

Verilen bu bilgilerin ışığı altında, (1) kesitine ait maksimum ve minimum eğilme momentleri



$$M_{1,\text{maks}} = 25 \times \left((1.20 + 3.60) \times \frac{6}{2} + 3.60 \times \frac{6}{2} \right) + 80 \times 3.60 \quad \Rightarrow M_{1,\text{maks}} = 918.00 \text{ kNm} \checkmark$$

$$M_{1,\text{min}} = 25 \times \left(-1.197 \times \frac{2}{2} \right) + 80 \times -1.197 \quad \Rightarrow M_{1,\text{min}} = -125.69 \text{ kNm} \checkmark$$

Aynı şekilde, T_1 tesir çizgisi kullanılarak $T_{1,\text{maks}}$ ve $T_{1,\text{min}}$ kesit zorları

$$T_{1,\text{maks}} = 25 \times \left(0.40 \times \frac{6}{2} \right) + 80 \times 0.40 \quad \Rightarrow T_{1,\text{maks}} = 62.00 \text{ kN} \checkmark$$

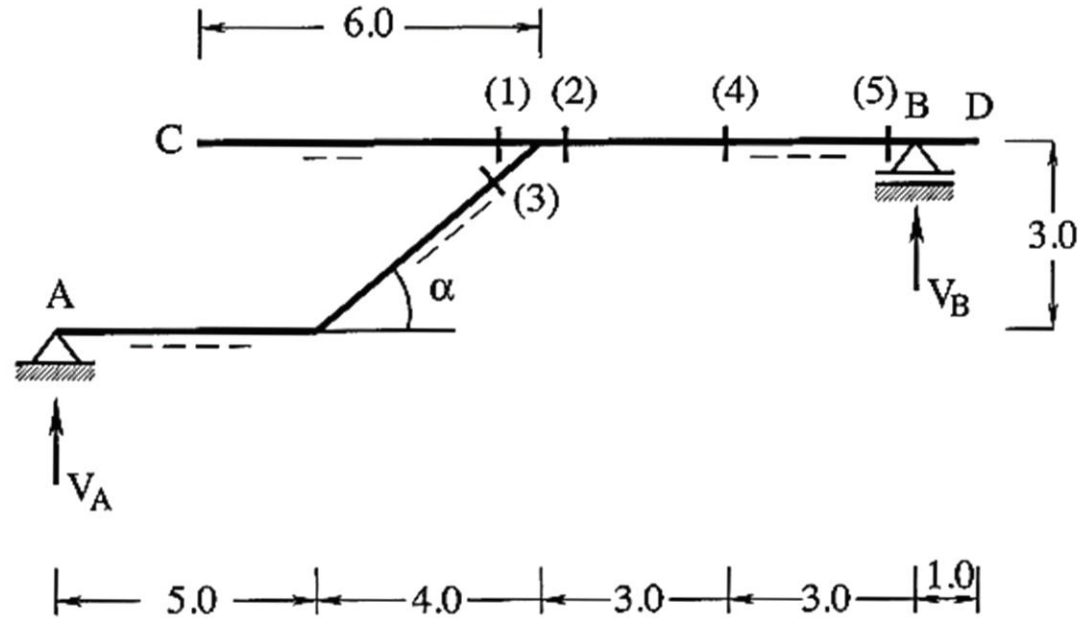
$$T_{1,\text{min}} = 25 \times \left((-0.20 - 0.60) \times \frac{6}{2} - 0.133 \times \frac{2}{2} \right) - 0.60 \times 80 \quad \Rightarrow T_{1,\text{min}} = -111.33 \text{ kN} \checkmark$$

olarak bulunur.

PROBLEM 10.2

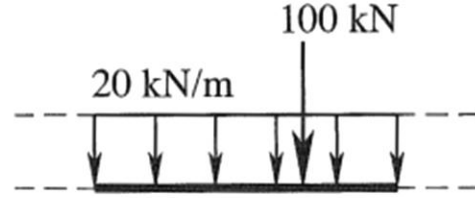
a) Şekil 10.2 de verilen sistemin V_A , V_B , M_1 , T_1 , M_2 , T_2 , N_3 , M_3 , T_4 , T_5 ve M_4 tesir çizgilerini çiziniz.

Not : 1 kN luk düşey yük C-D arasında dolaşmaktadır.



Şekil 10.2: Yapı sistemi

b) Şekil 10.2a da verilen hareketli yük için maksimum ve minimum T_2 , M_2 kesit zorlarını hesaplayınız.



Şekil 10.2a: Hareketli yük

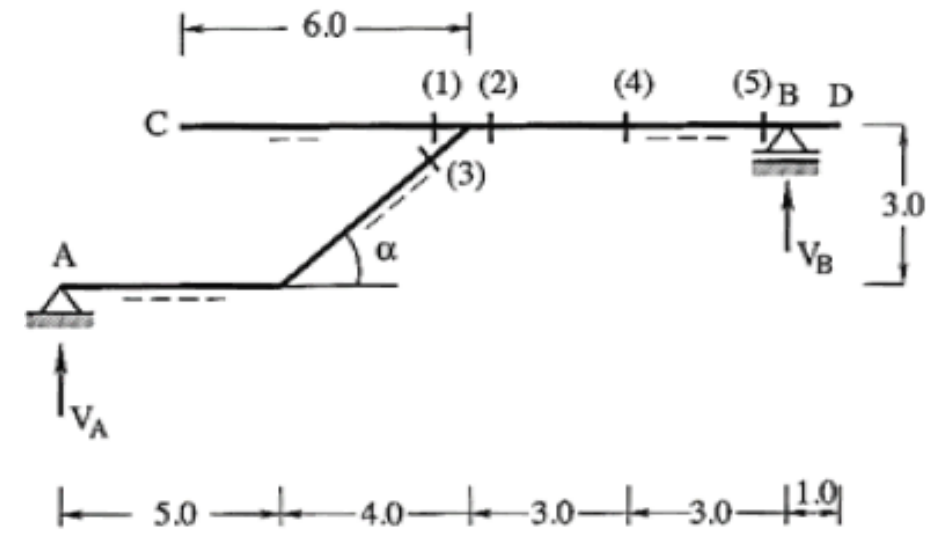
a) Tesir çizgileri 1 kN luk düşey yükün dolaştığı bölgede ve yatay bir doğru parçası üzerinde çizilmektedir. Yani, bu soruda istenilen tesir çizgilerinin çizimi C den D ye kadar çizilen bir yatay doğru üzerinde yapılacaktır. Bundan dolayı, Şekil 10.2c de kesikli çizgi ile çizilen tesir çizgileri dikkate alınmaz.

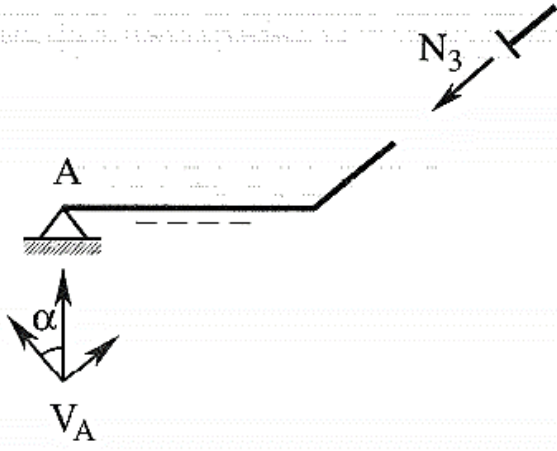
Yapı sisteminde bulunan eğik çubuğun yatayla yaptığı α açısına bağlı olarak hesaplanan trigonometrik büyüklükler

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0.60 \quad , \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0.80$$

dir.

N_3 ve M_3 kesit zorları, (3) kesiti 1 kN luk düşey yükün dolaşmadığı bölgede bulunduğu için, Şekil 10.2b de verilen kesim işlemi yapılarak





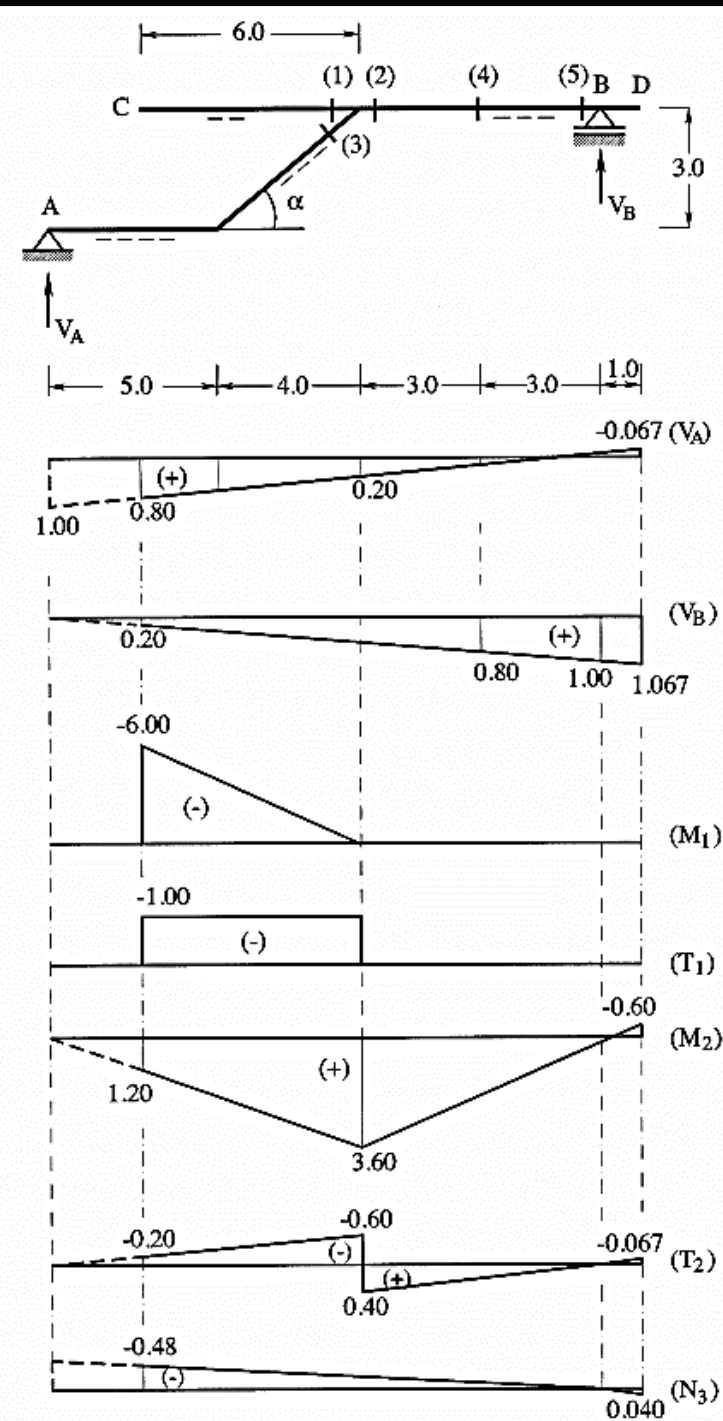
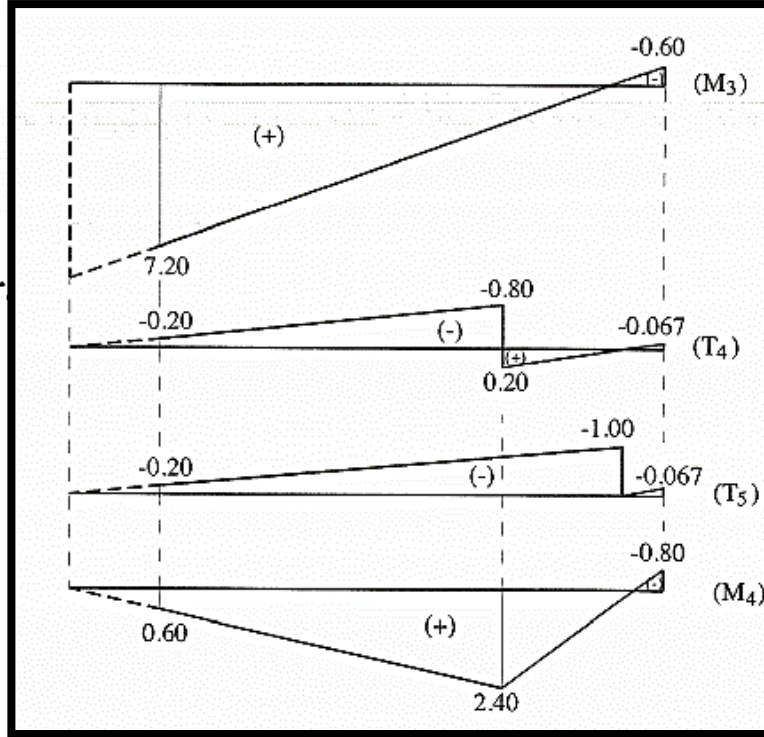
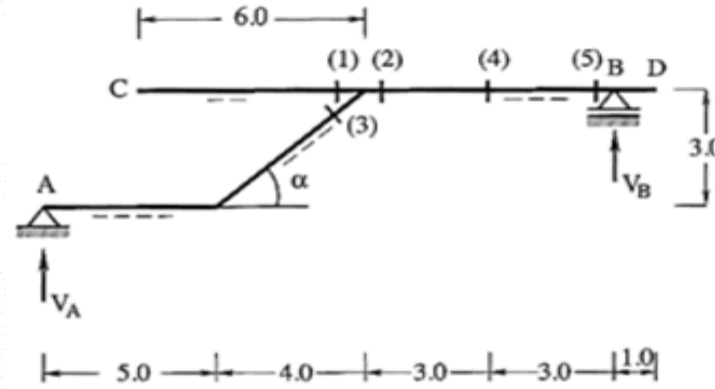
Şekil 10.2b: N_3 kesit zoru

$$N_3^{tc} = -V_A \times \sin \alpha = -0.60 \times V_A$$

$$M_3^{tc} = 9 \times V_A$$

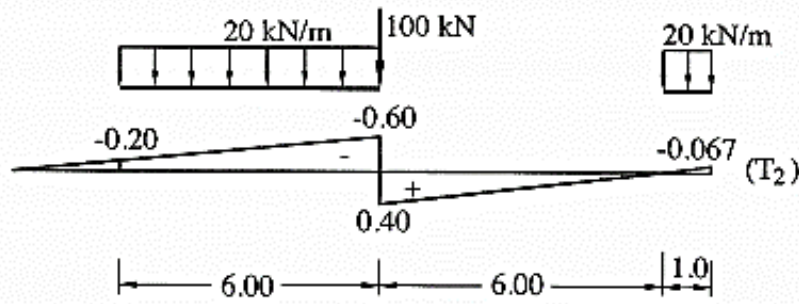
şeklinde V_A mesnet tepkisine bağlı olarak yazılırlar.

Soruda istenilen tüm tesir çizgilerinin çizimi Şekil 10.2c de verilmiştir



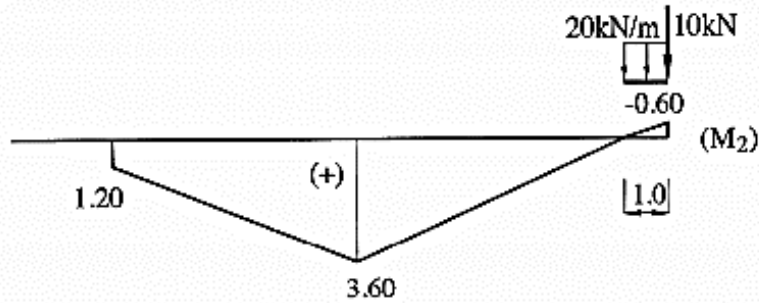
b)

➤ $\min T_2$ nin hesabı :



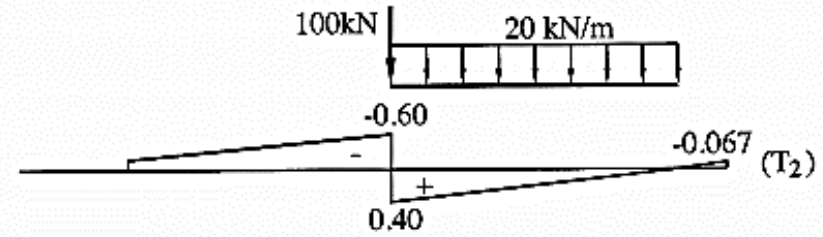
$$\min T_2 = 100 \times (-0.60) + 20 \times \left(\frac{(-0.20 - 0.60)}{2} \times 6 - \frac{(0.067) \times 1}{2} \right) = -108.67 \text{ kN} \checkmark$$

➤ $\min M_2$ nin hesabı :



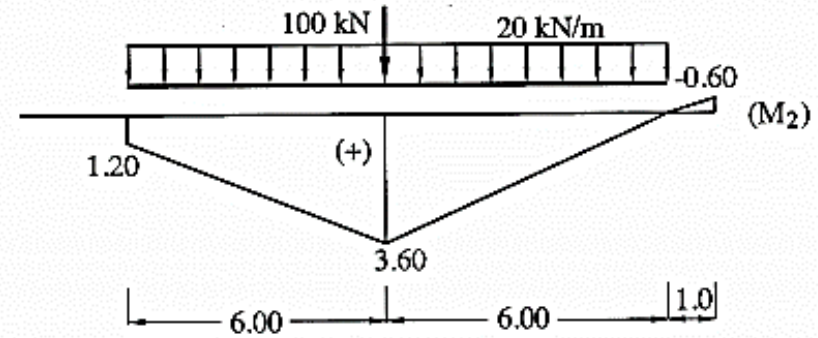
$$\min M_2 = 100 \times (-0.60) + 20 \times \left(\frac{(-0.60) \times 1}{2} \right) = -66.00 \text{ kNm} \checkmark$$

➤ $\max T_2$ nin hesabı :

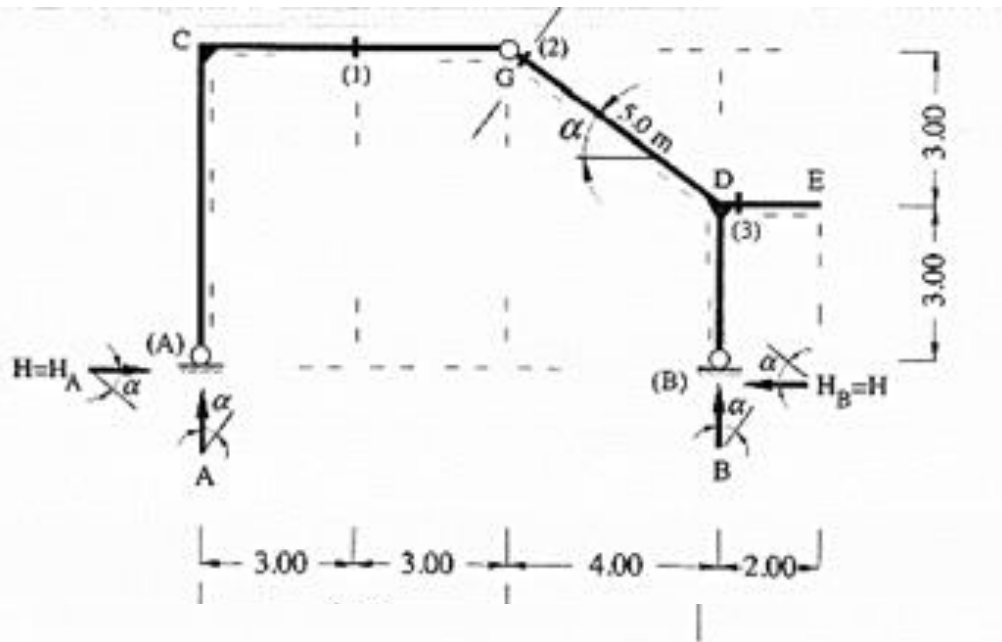


$$\max T_2 = 100 \times (0.40) + 20 \times \left(\frac{(0.40) \times 6}{2} \right) = 64.00 \text{ kN} \checkmark$$

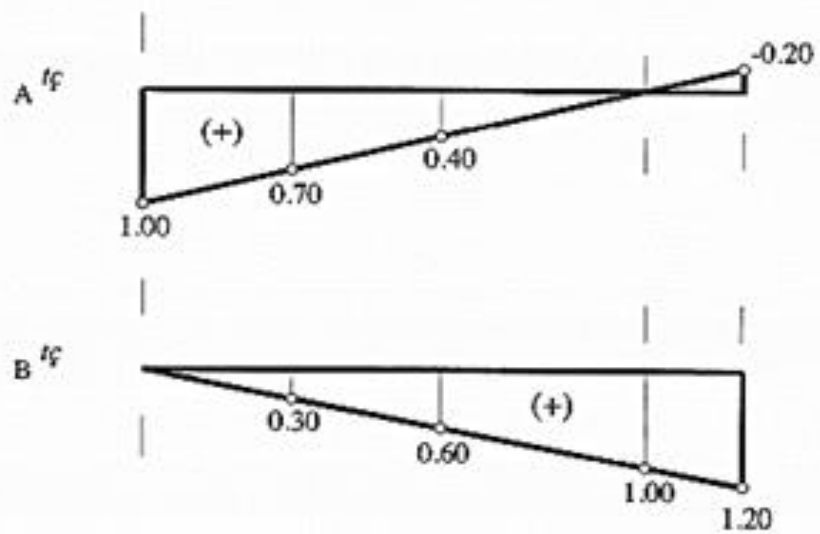
➤ $\max M_2$ nin hesabı :



$$\max M_2 = 100 \times (3.60) + 20 \times \left(\frac{(1.20 + 3.60)}{2} \times 6 + \frac{(3.60) \times 6}{2} \right) = 864.00 \text{ kNm} \checkmark$$



$$\sum M_B = 0 \quad A * 10 - 1 * (10 - x) = 0 \rightarrow A = 1 - \frac{x}{10}$$



$$\sum y = 0 \quad A + B = 1 \rightarrow B = \frac{x}{10}$$

✓ **(1) kesitindeki M_1 eğilme momenti ve T_1 kesme kuvveti tesir çizgilerine ait ifadelerin elde edilmesi :**

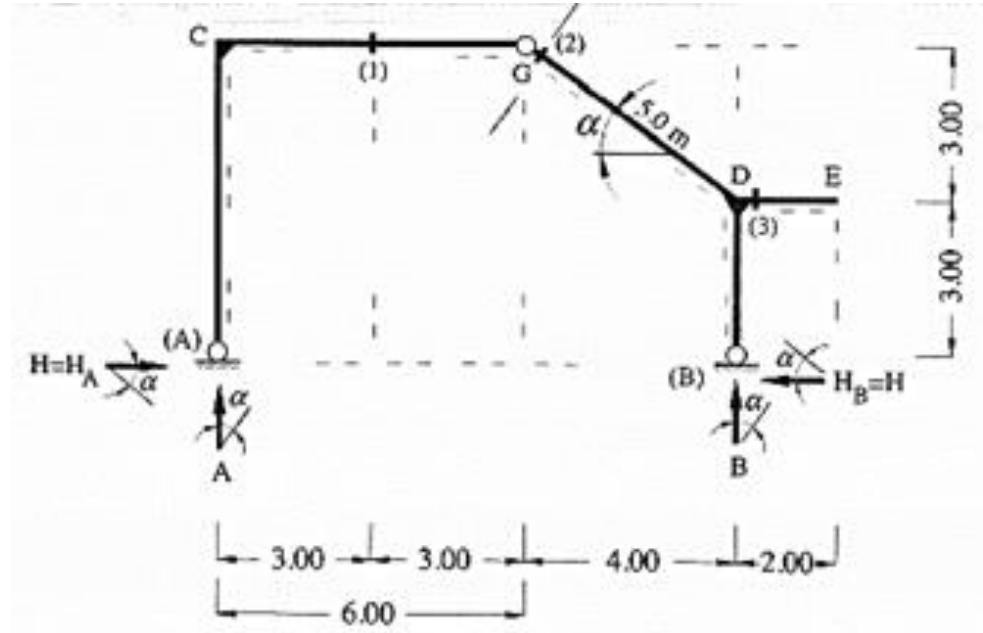
➤ **1 kN luk düşey kuvvet C-(1) arasında hareket ederken,**

(1) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin sağında kalan 1 kN luk yükün bulunmadığı parça dikkate alındığında

$$M_1 = 7 \times B - 6 \times H \quad , \quad T_1 = -B$$

$$B = \frac{X}{10}$$

bağıntıları elde edilir.



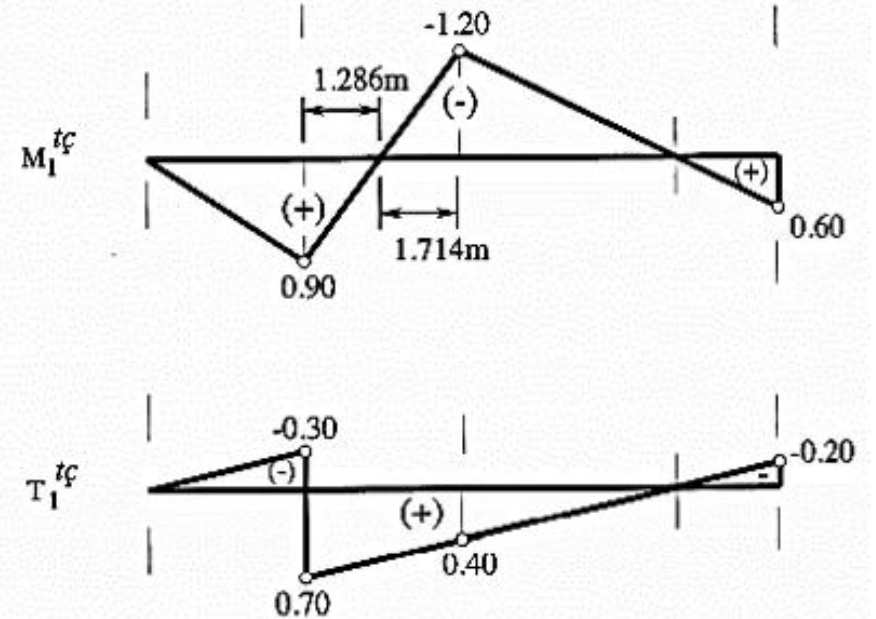
➤ **1 kN luk düşey kuvvet (1)-E arasında hareket ederken,**

(1) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin solunda kalan 1 kN luk yükün bulunmadığı parça dikkate alındığında

$$M_1 = 3 \times A - 6 \times H \quad , \quad T_1 = A$$

ifadeleri bulunur. Böylece, (1) kesitine ait eğilme momenti ve kesme kuvveti tesir çizgileri mesnet tepkilerine bağlı olarak çizilebilir duruma gelmiştir.

$$A = 1 - \frac{X}{10}$$



✓ **(3) kesitindeki M_3 eğilme momenti tesir çizgisine ait ifadenin elde edilmesi :**

➤ **1 kN luk düşey kuvvet C-(3) arasında hareket ederken,**

(3) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin sağında kalan parça dikkate alındığında

$$M_3 = 0$$

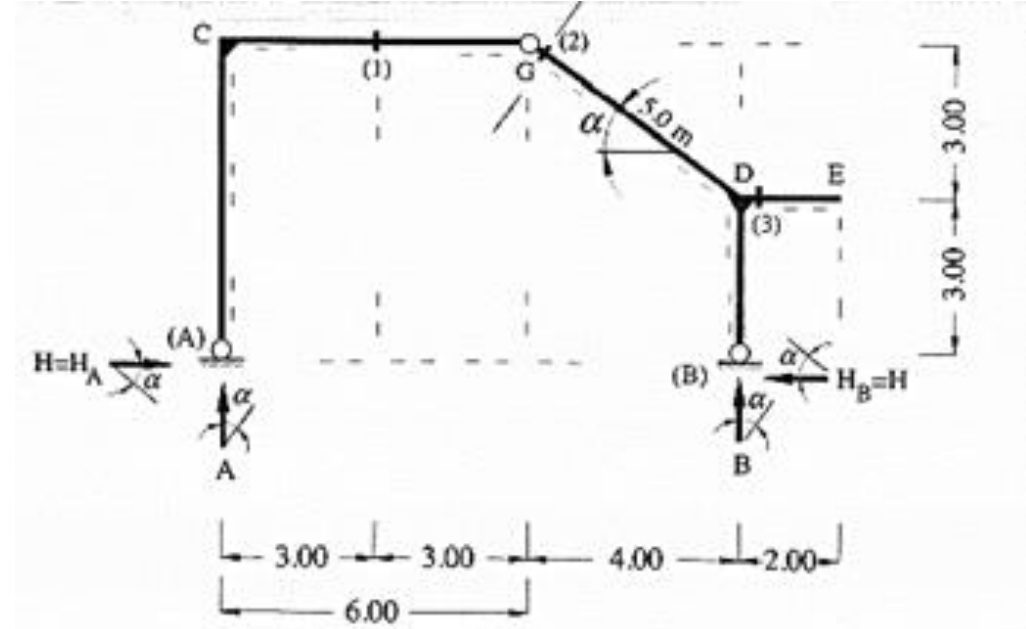
olarak bulunur.

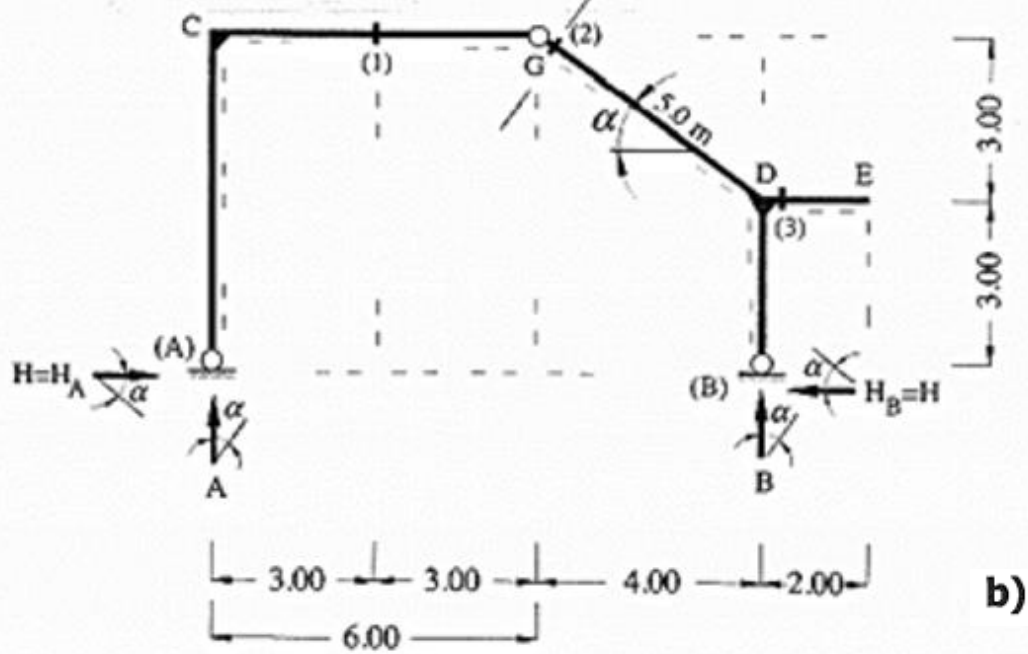
➤ **1 kN luk düşey kuvvet (3)-E arasında hareket ederken,**

1 kN luk düşey kuvvet (3)-E arasında herhangi bir noktaya etkilir ve bu kuvvetin (3) kesitine olan uzaklığı x olarak seçilir. (3) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin sağında kalan parça dikkate alındığında

$$M_3 = -x$$

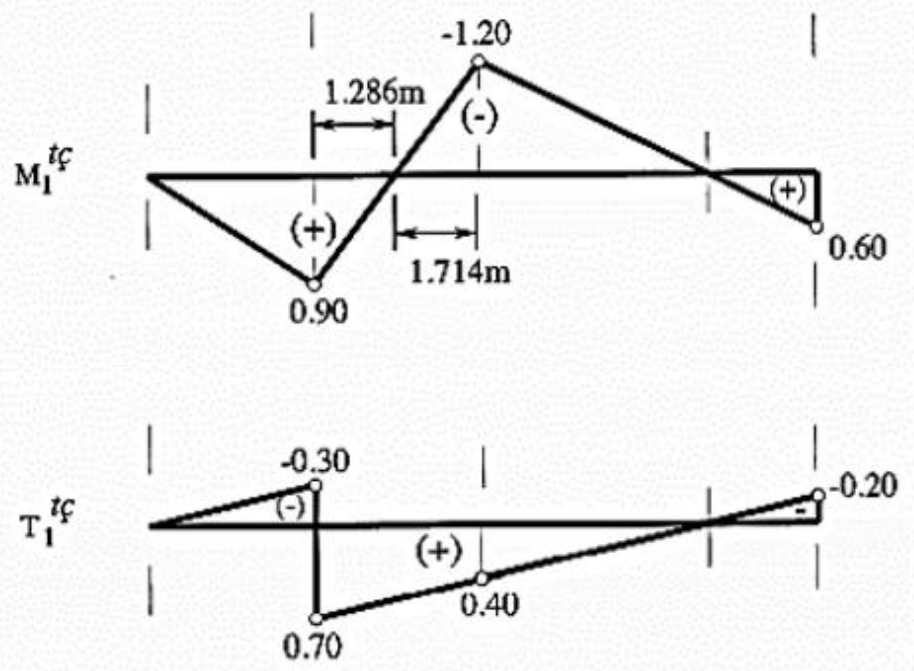
bağıntısı elde edilir.





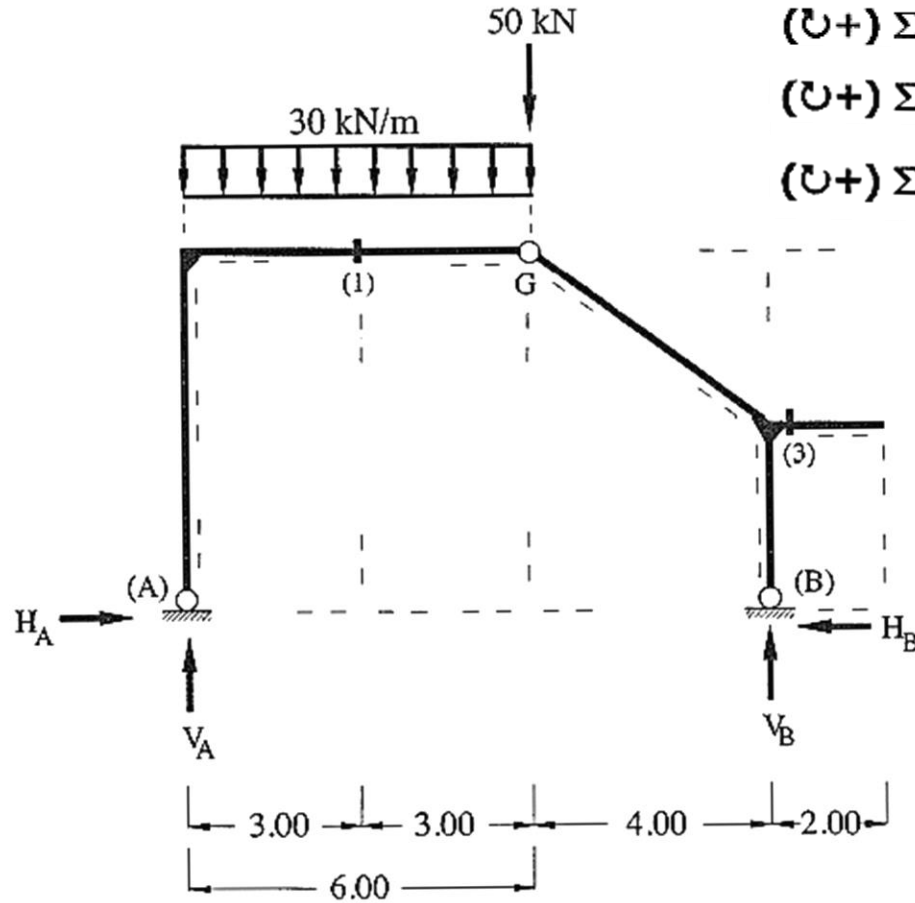
$$M_1 = 30 \times \left(\frac{0.9 \times 3}{2} + \frac{0.9 \times 1.286}{2} - \frac{1.20 \times 1.714}{2} \right) + 50 \times -1.20 = -32.991 \text{ kNm} \checkmark$$

$$T_1 = 30 \times \left(-0.30 \times \frac{3}{2} + (0.70 + 0.40) \times \frac{3}{2} \right) + 50 \times 0.40 = 56.00 \text{ kN} \checkmark$$



Kontrol:

Tesir çizgilerinden yararlanarak elde edilen (1) kesitine ait kesit zorlarının doğruluğu, yapı sisteminin sabit yükler altında hesabı yapılarak kontrol edilecektir. Buna göre ilk olarak, verilen dış yükler altında moment ve izdüşüm denge denklemleri yazılarak mesnet tepkileri hesaplanır.



$$(\cup+) \Sigma M_B = 0 \quad V_A \times 10.00 - 30 \times 6.00 \times 7.00 - 50 \times 4.00 = 0 \Rightarrow V_A = 146.00 \text{ kN } \uparrow$$

$$(\cup+) \Sigma M_{G,\text{sol}} = 0 \quad V_A \times 6.00 - 30 \times 6.00 \times 3.00 - H_A \times 6.00 = 0 \Rightarrow H_A = 56.00 \text{ kN } \rightarrow$$

$$(\cup+) \Sigma M_A = 0 \quad 30 \times 6 \times 3 + 50 \times 6 - V_B \times 10 = 0 \quad \Rightarrow V_B = 84.00 \text{ kN } \uparrow$$

$$(\cup+) \Sigma M_{G,\text{sağ}} = 0 \quad H_B \times 6.00 - V_B \times 4.00 = 0 \quad \Rightarrow H_B = 56.00 \text{ kN } \leftarrow$$

Kontrol-1) $(\uparrow+) \Sigma F_y = 0$ olmalıdır.

$$\Sigma F_y = V_A + V_B - 30 \times 6 - 50 = 0 \quad \checkmark$$

Kontrol-2) $(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0$ olmalıdır.

$$\Sigma F_x = H_A - H_B = 0 \quad \checkmark$$

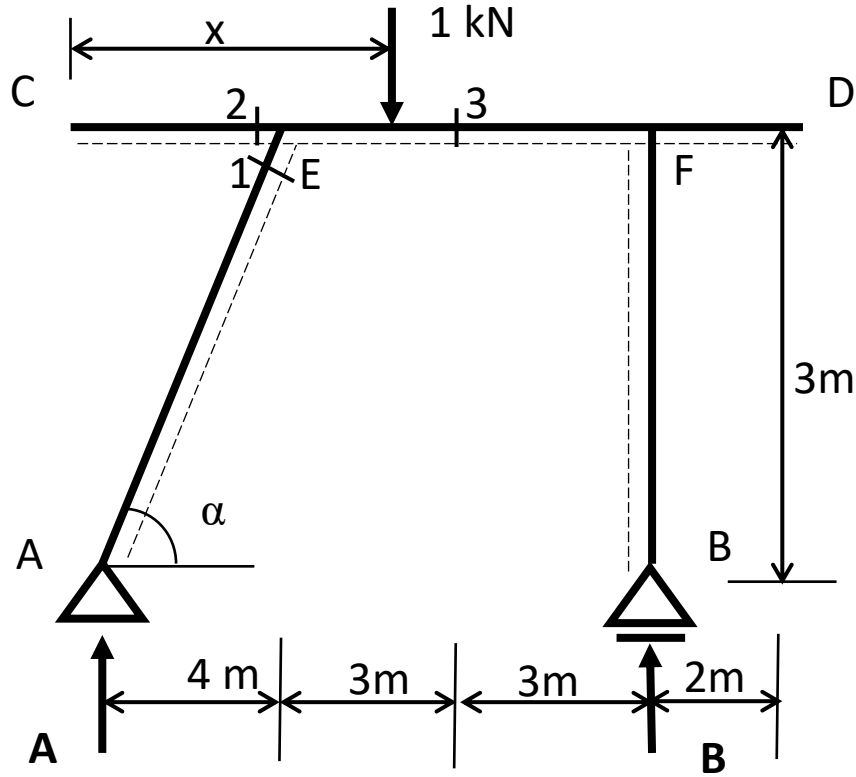
Yapı sisteminde hesaplanan tüm mesnet tepkilerinin doğruluğu kanıtlandığına göre, (1) kesitindeki kesit zorları elde edilebilir. Buna göre; (1) kesitinden kesim yapılarak, sözkonusu kesitin solunda kalan parça dikkate alındığında

$$M_1 = V_A \times 3 - 30 \times 3 \times 1.5 - H_A \times 6 = -33.00 \text{ kNm } \checkmark$$

$$T_1 = V_A - 30 \times 3 = 56.00 \text{ kN } \checkmark$$

şeklinde kesit zorları hesaplanır. Buradan da görüldüğü gibi, tesir çizgilerinden yararlanılarak elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleriyle aynı sonuçlar bulunmuştur.

ÖRNEK



A, B, M₁, M₂, M₃, T₁, T₂, T₃ tesir çizgilerini çiziniz.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

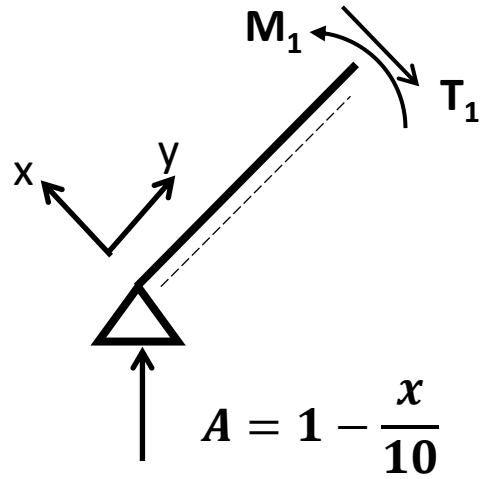
$$\sum M_A = 0 \quad -B \cdot 10 + 1 \cdot x = 0 \rightarrow B = \frac{x}{10}$$

$$\sum y = 0 \quad A + B = 1 \rightarrow A = 1 - \frac{x}{10}$$

$$x = 0 \rightarrow B = 0 \quad A = 10 \text{ kN}$$

$$x = 12 \rightarrow B = 1.2 \text{ kN} \quad A = -0.2 \text{ kN}$$

M_1, T_1 tesir çizgileri



$$\sum M = 0 \rightarrow 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{10}\right) - M_1 = 0$$

$$M_1 = 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow A \cdot \cos\alpha - T_1 = 0$$

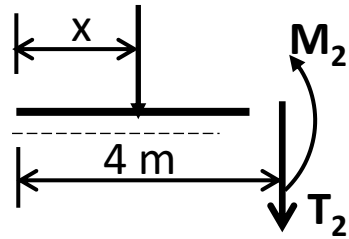
$$T_1 = 0.8 \cdot \left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$x = 0 \rightarrow M_1 = 4 \text{ kNm} \quad T_1 = 0.8 \text{ kN}$$

$$x = 10 \rightarrow M_1 = 0 \text{ kNm} \quad T_1 = 0 \text{ kN}$$

$$x = 12 \rightarrow M_1 = -0.8 \text{ kNm} \quad T_1 = -0.16 \text{ kN}$$

M_2, T_2 tesir çizgileri



$$\sum M = 0 \rightarrow -M_2 - (4 - x) \cdot 1 = 0$$

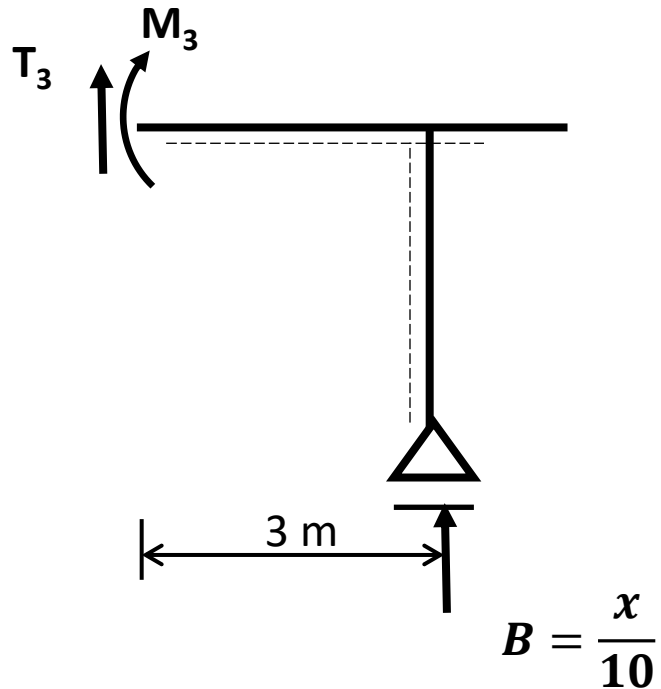
$$M_2 = -(4 - x)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow -T_2 - 1 = 0 \quad T_2 = -1$$

$$x = 0 \rightarrow M_2 = -4 \text{ kNm} \quad T_2 = -1 \text{ kN}$$

$$x = 4 \rightarrow M_2 = 0 \text{ kNm} \quad T_2 = -1 \text{ kN}$$

M_3, T_3 tesir çizgileri
1 kN luk yük 3 kesitinin solunda



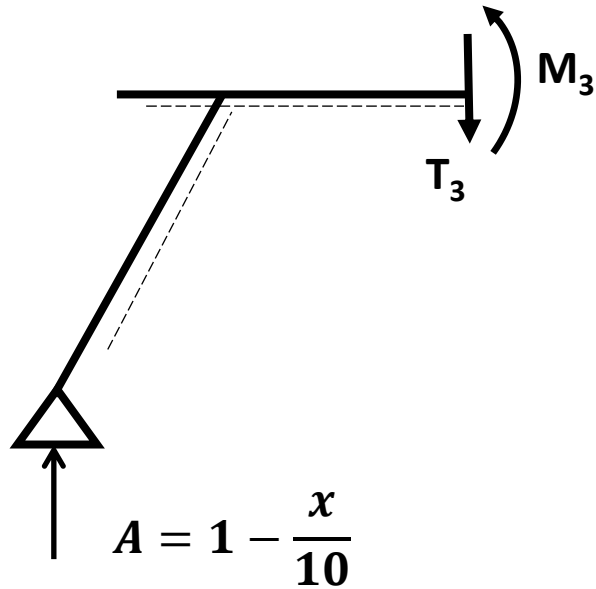
$$\sum M = 0 \rightarrow M_3 = 3 \cdot \frac{x}{10}$$

$$\sum y = 0 \rightarrow T_3 = -\frac{x}{10}$$

$$x = 0 \rightarrow M_3 = 0 \text{ kNm} \quad T_3 = 0 \text{ kN}$$

$$x = 7 \rightarrow M_3 = 2.1 \text{ kNm} \quad T_3 = -0.7 \text{ kN}$$

M_3, T_3 tesir çizgileri
1 kN luk yük 3 kesitinin sağında

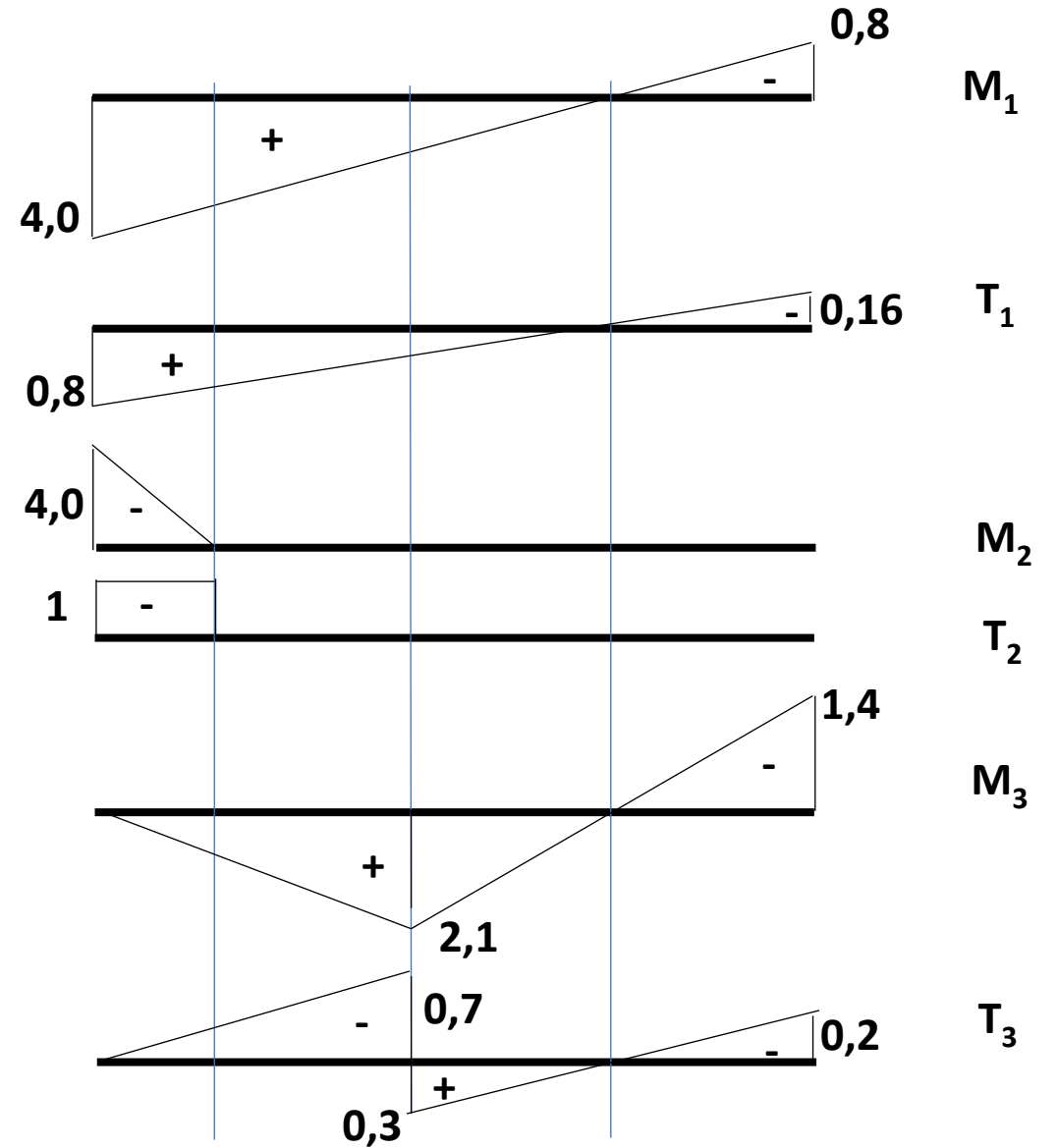
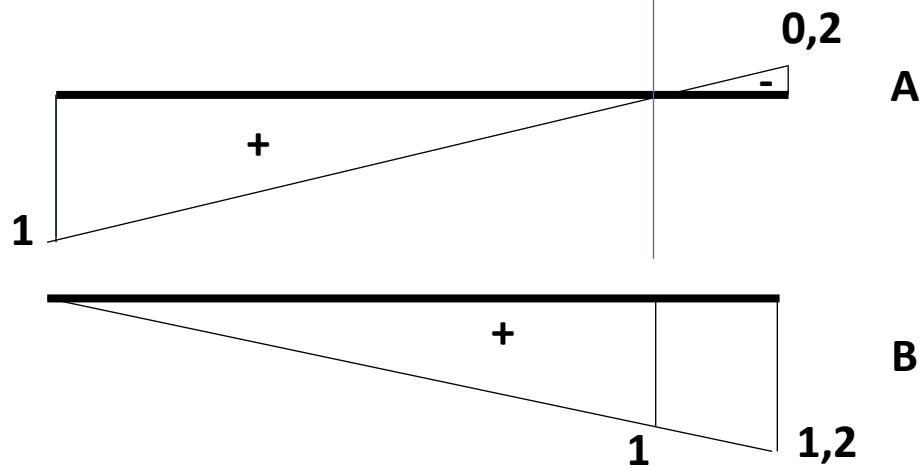
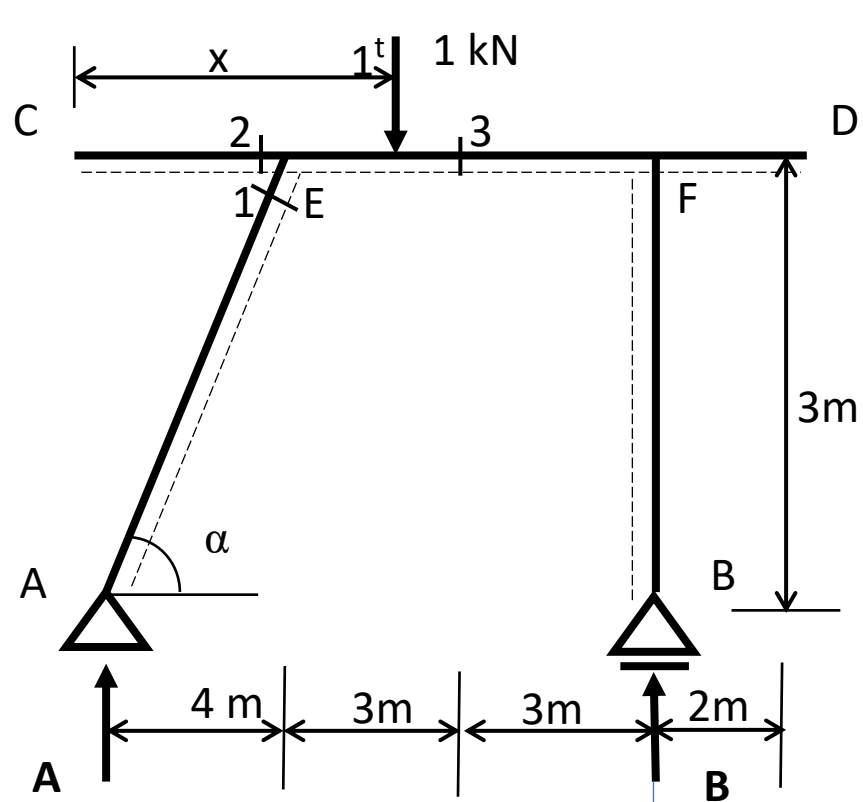


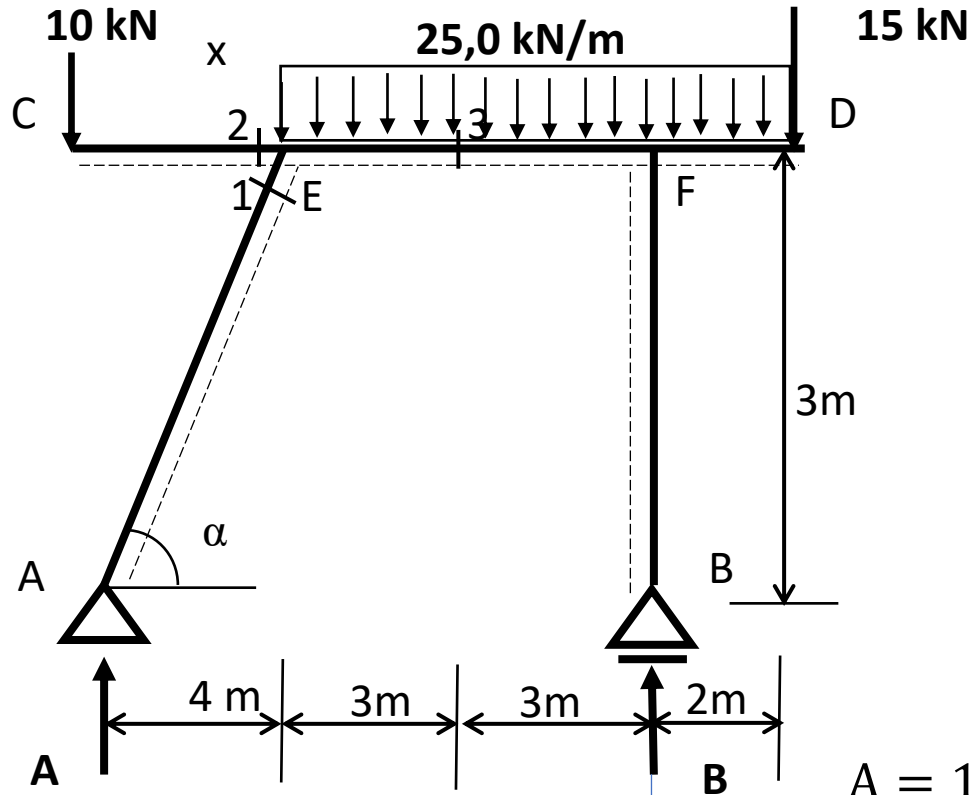
$$\sum M = 0 \rightarrow M_3 = 7\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow T_3 = 1 - \frac{x}{10}$$

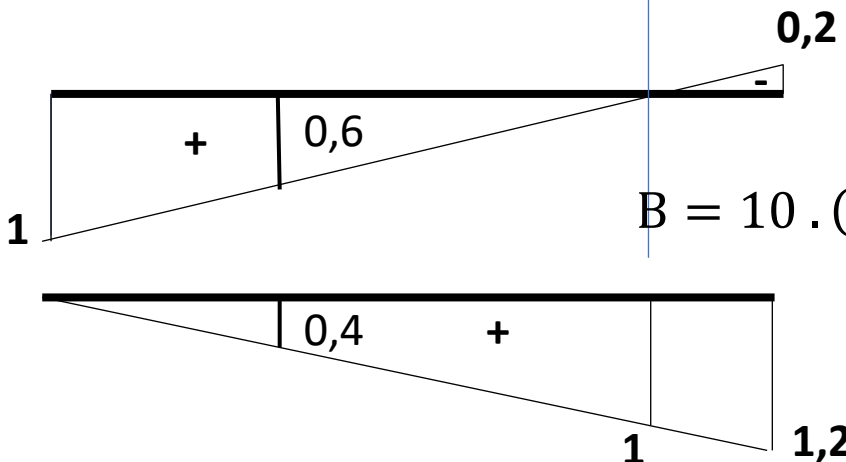
$$x = 7 \rightarrow M_3 = 2.1 \text{ kNm} \quad T_3 = 0.3 \text{ kN}$$

$$x = 12 \rightarrow M_3 = -1.4 \text{ kNm} \quad T_3 = -0.2 \text{ kN}$$





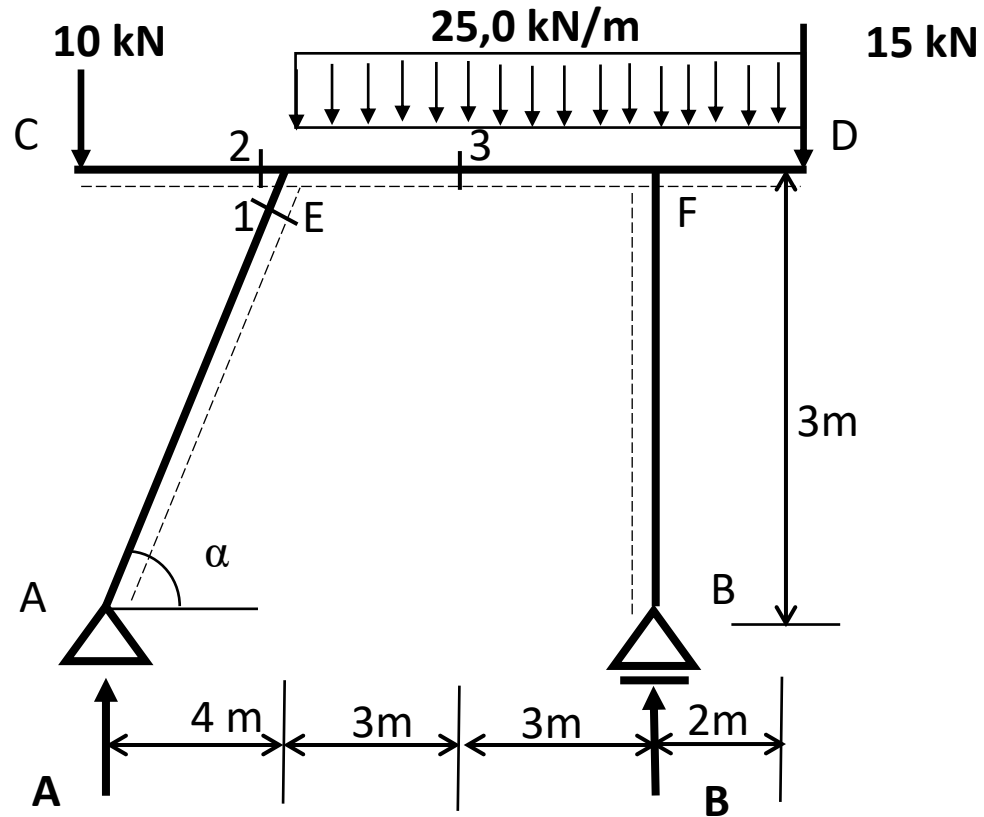
Tesir çizgilerini kullanarak A ve B mesnet tepkilerini hesaplayınız



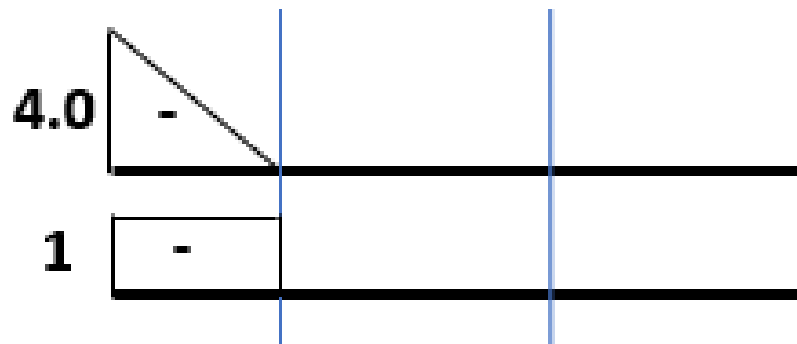
$$A = 10 \cdot (1) + \frac{6 \cdot 0,6}{2} \cdot 25 - 2 \cdot 0,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 - 15 \cdot 0,2 = 47 \text{ kN}$$

$$B = 10 \cdot (0) + \frac{0,4 + 1,0}{2} \cdot 6 \cdot 25 + \frac{1 + 1,2}{2} \cdot 2 \cdot 25 + 15 \cdot 1,2 = 178 \text{ kN}$$

Kontrol $\sum y = 0 \rightarrow A + B = 225 = 47 + 178 \checkmark$



Tesir çizgilerini kullanarak M_2 ve T_2 değerlerini hesaplayınız

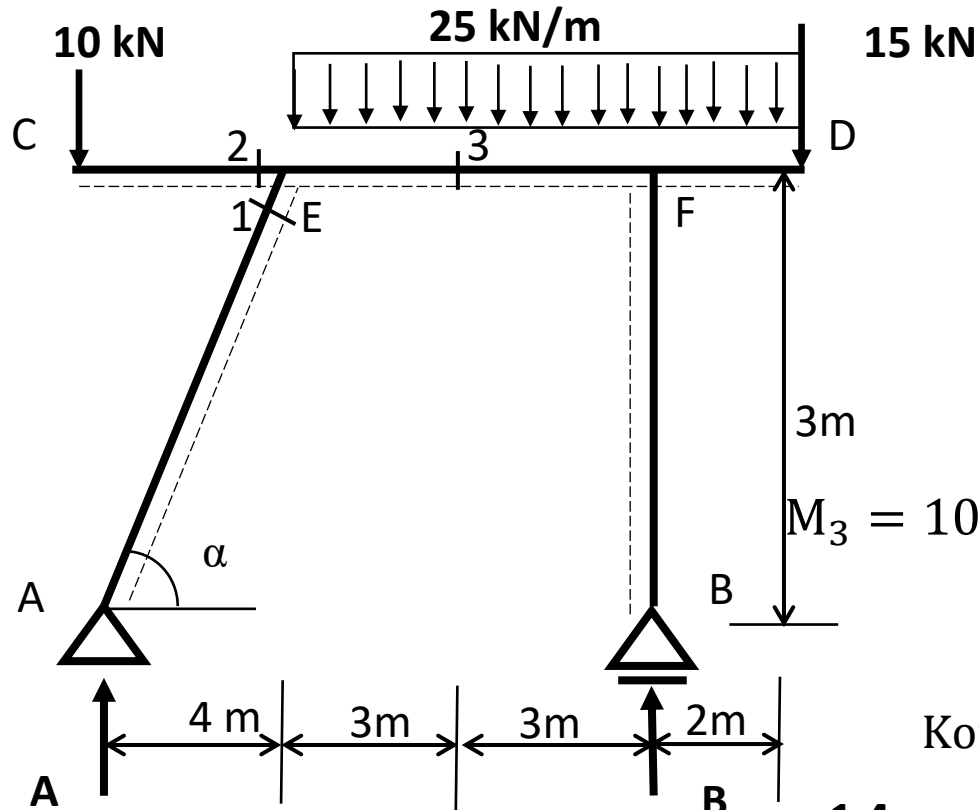


M_2

$$M_2 = 10 \cdot (-4) = -40 \text{ kNm}$$

T_2

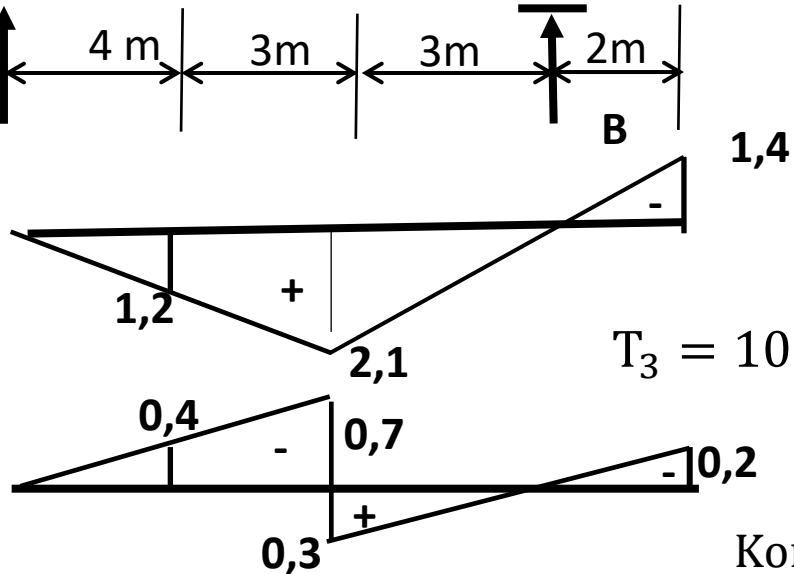
$$T_2 = 10 \cdot (-1) = -10 \text{ kN}$$



Tesir çizgilerini kullanarak M_3 ve T_3 değerlerini hesaplayınız

$$M_3 = 10 \cdot (0) + \frac{1,2 + 2,1}{2} \cdot 3 \cdot 25 + \frac{3 \cdot 2,1}{2} \cdot 25 - 2 \cdot 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 - 15 \cdot 1,4 = 146,5 \text{ kNm}$$

Kontrol $\sum M = 0 \rightarrow M_3 = A \cdot 7 - 10 \cdot 7 - 25 \cdot 3 \cdot 1,5 = 146,5 \text{ kNm} \checkmark$
 $A = 47 \text{ kN}$

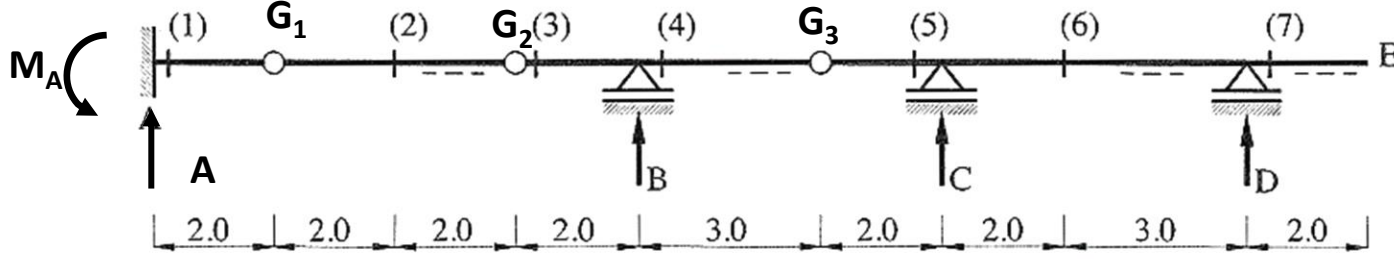


$$T_3 = 10 \cdot (0) - \frac{0,4 + 0,7}{2} \cdot 3 \cdot 25 + 0,3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 - \frac{2 \cdot 0,2}{2} \cdot 25 - 15 \cdot 0,2 = -38 \text{ kNm}$$

Kontrol $\sum y = 0 \rightarrow T_3 = A - 10 - 25 \cdot 3 = -38 \text{ kN} \checkmark$
 $A = 47 \text{ kN}$

PROBLEM 10.4

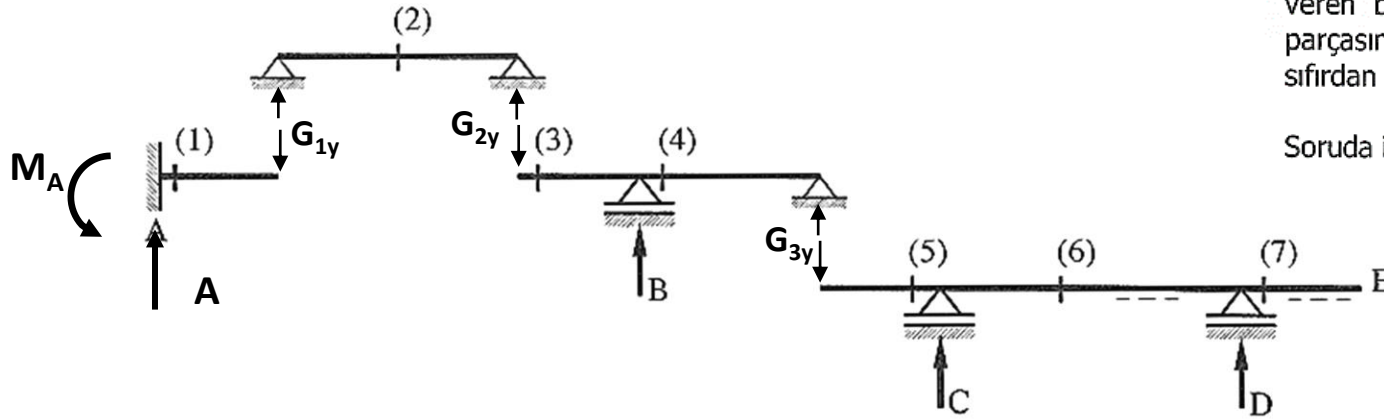
Şekil 10.9 da verilen gerber kirişinde $M_1, M_2, T_2, T_3, M_4, T_4, M_5, M_6, M_7, B$ ve D tesir çizgilerini çiziniz.
Not : 1 kN luk düşey yük A-E arasında dolaşmaktadır.



Şekil 10.9: Gerber kirişi

Ara mafsallı sistemlerde tesir çizgileri, tesir çizgisi çizilecek olan büyüklüğün bulunduğu sistemde ve bu sistemin taşıdığı sistem parçalarında çizilir.

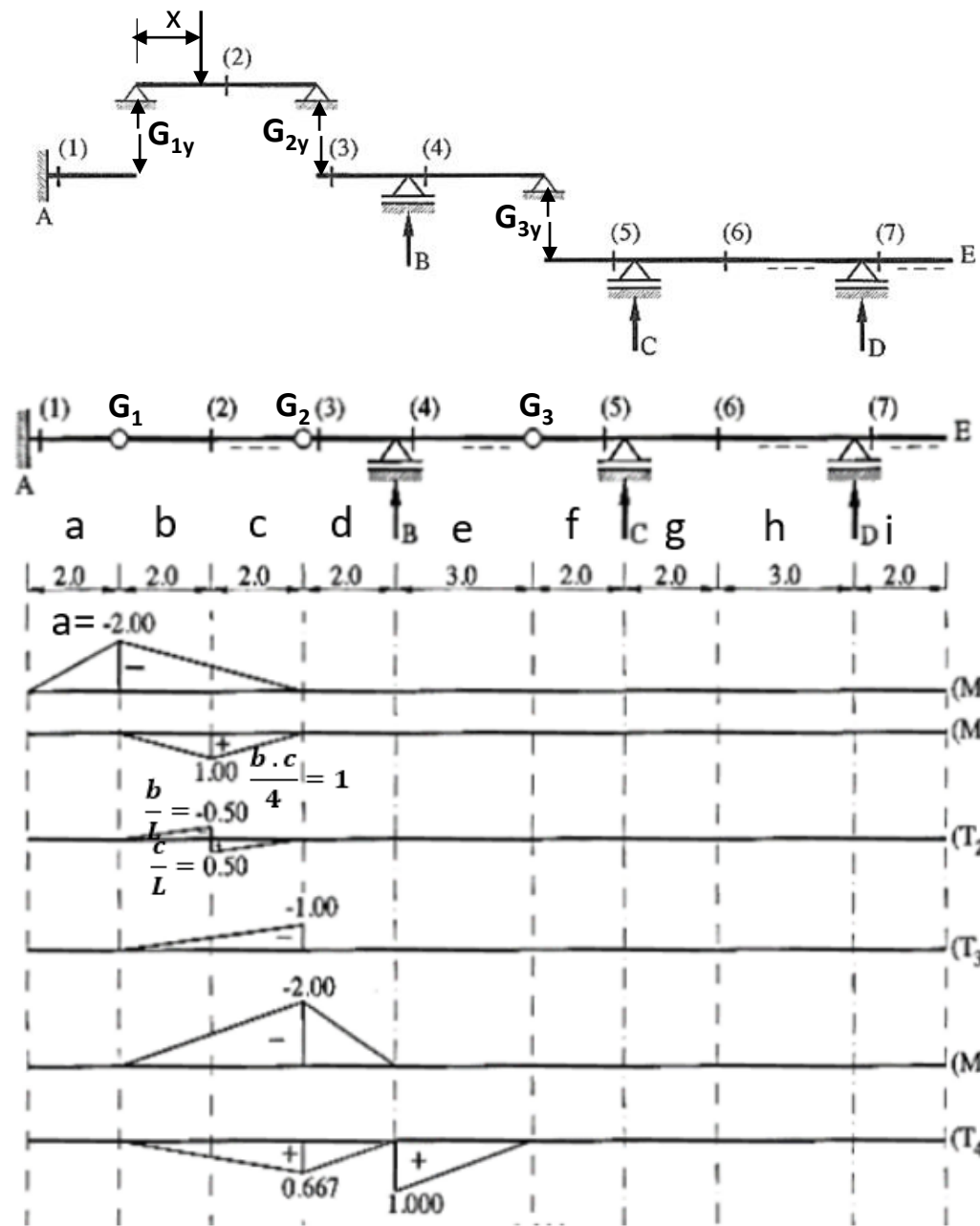
Öncelikle; soruda verilen gerber kirişinin taşıma şeması çizilir, Şekil 10.9a.



Şekil 10.9a: Taşıma şeması

Basit kiriş, çıkmalı kiriş ve konsol kiriş gibi bilinen basit sistem parçalarında tesir çizgileri otomatik olarak çizilir. Tesir çizgisinin otomatik olarak çizilemediği sistemlerde ise, 1 kN luk düşey tekil yükün konumuna göre aranılan büyüklüğün aldığı değerleri veren bağıntılar elde edilerek tesir çizgileri çizilir. Daha sonra; sözkonusu sistem parçasının taşıdığı parçalarda tesir çizgileri, mafsallarda kırıklık yaparak mesnetlerde sıfırdan geçecek şekilde devam ettirilir.

Soruda istenilen tüm tesir çizgilerinin çizimi Şekil 10.9b de verilmiştir.



$$0 \leq x \leq c + b = L$$

$$G_{2y} = \frac{x}{L}$$

$$T_3 = -G_{2y} = -\frac{x}{L} \rightarrow x = 0 T_3 = 0$$

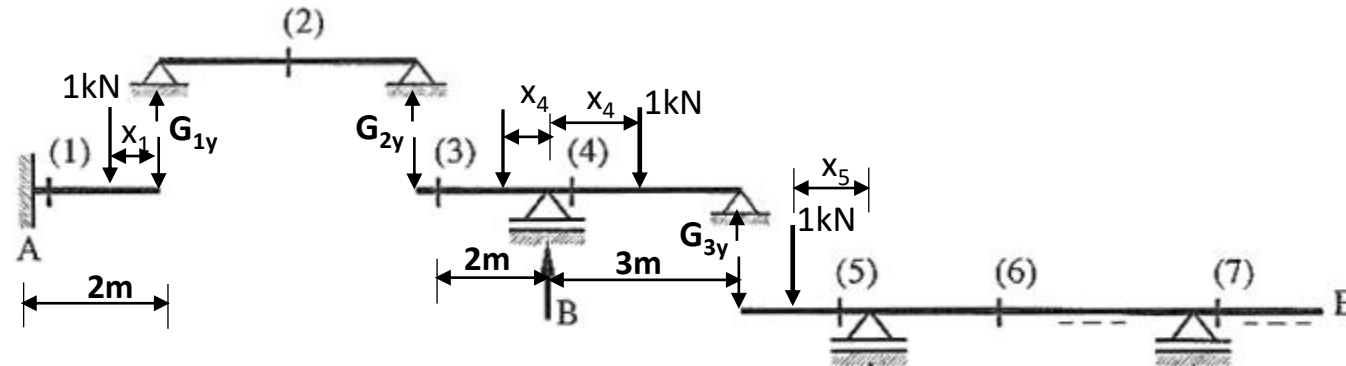
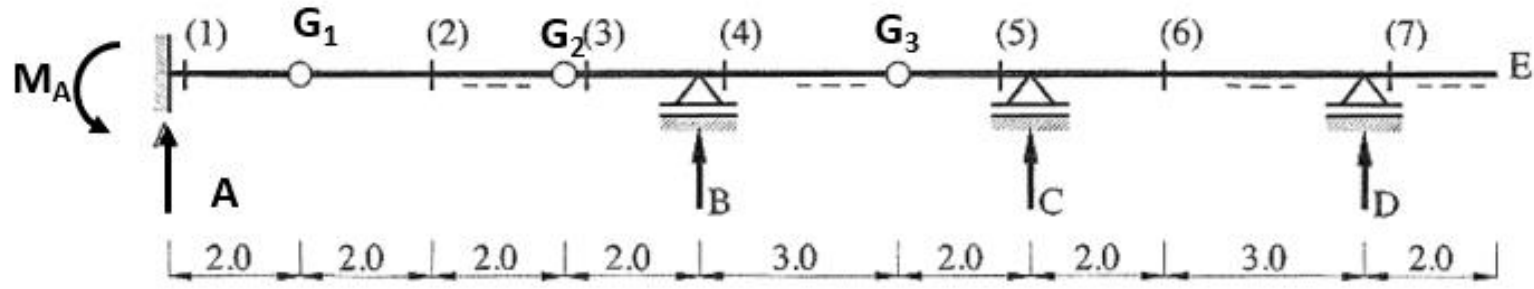
$$x = c + b = L \rightarrow x = L T_3 = -1$$

$$M_4 = -x \rightarrow x = 0 M_4 = 0$$

$$x = d = 2 M_4 = -d = -2$$

$$T_4 = 1 - \frac{x}{e} \rightarrow x = 0 T_4 = 1$$

$$x = e \rightarrow T_4 = 0$$



$$M_1 = 1 \cdot (2 - x_1)$$

$$x_1 = 0 \rightarrow M_1 = 2$$

$$x_1 = 2 \rightarrow M_1 = 0$$

$$0 \leq x_4 \leq 2 \quad B = 1 + \frac{x_4}{3}$$

$$T_4 = 1 + \frac{x_4}{3} - 1 = \frac{x_4}{3}$$

$$x_4 = 0 \quad T_4 = 0 \quad x_4 = 2 \quad T_4 = 0.667$$

$$0 \leq x_4 \leq 3 \quad B = 1 - \frac{x_4}{3} \quad T_4 = 1 - \frac{x_4}{3}$$

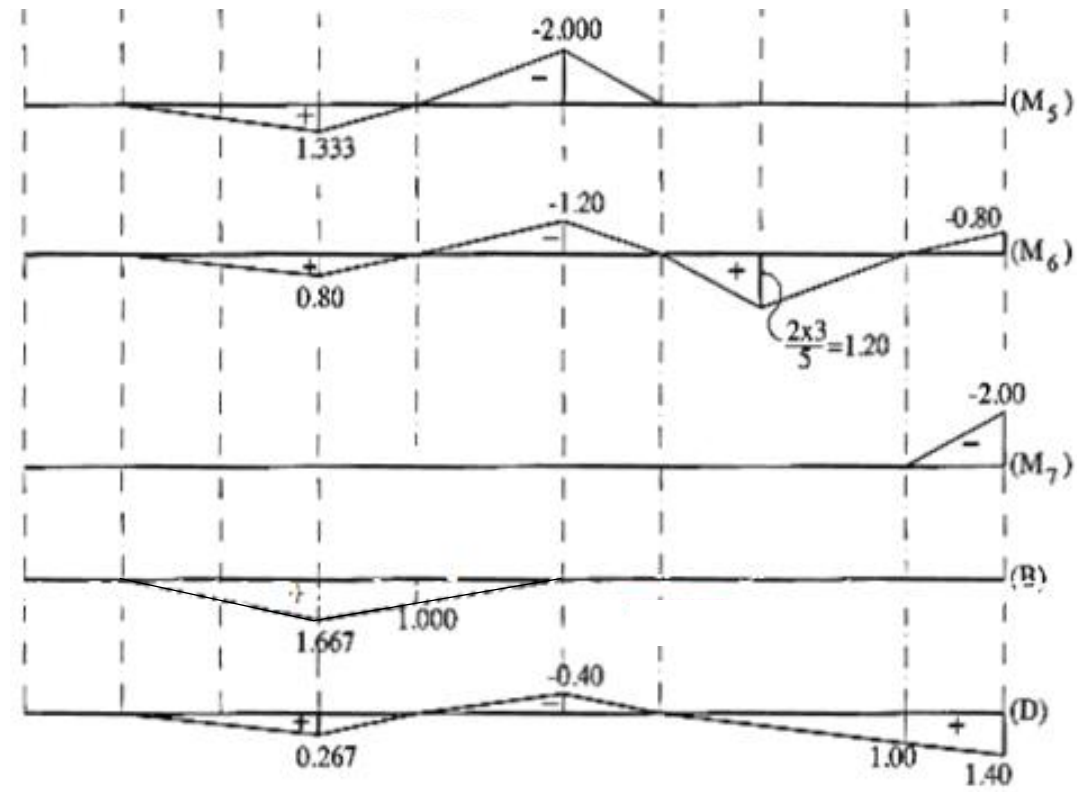
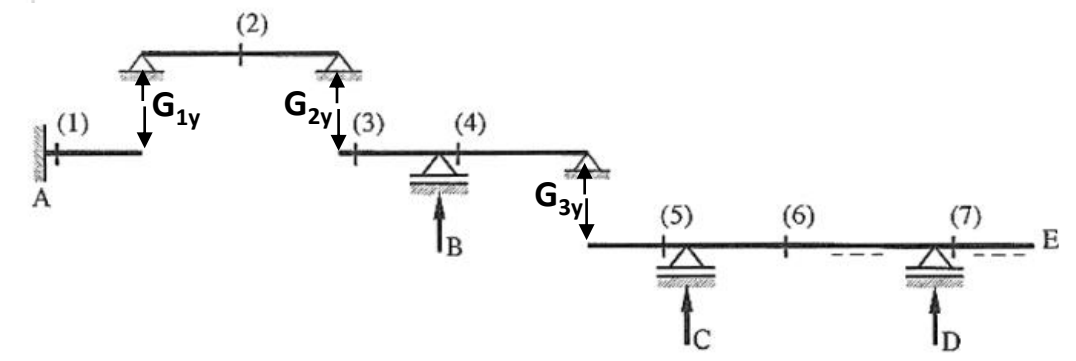
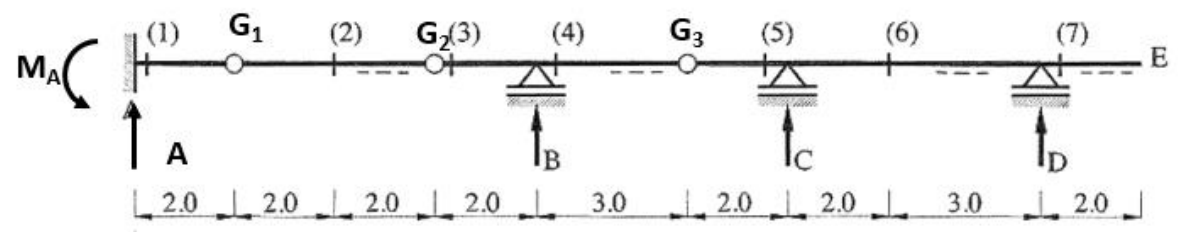
$$x_4 = 0 \quad T_4 = 1 \quad x_4 = 3 \quad T_4 = 0$$

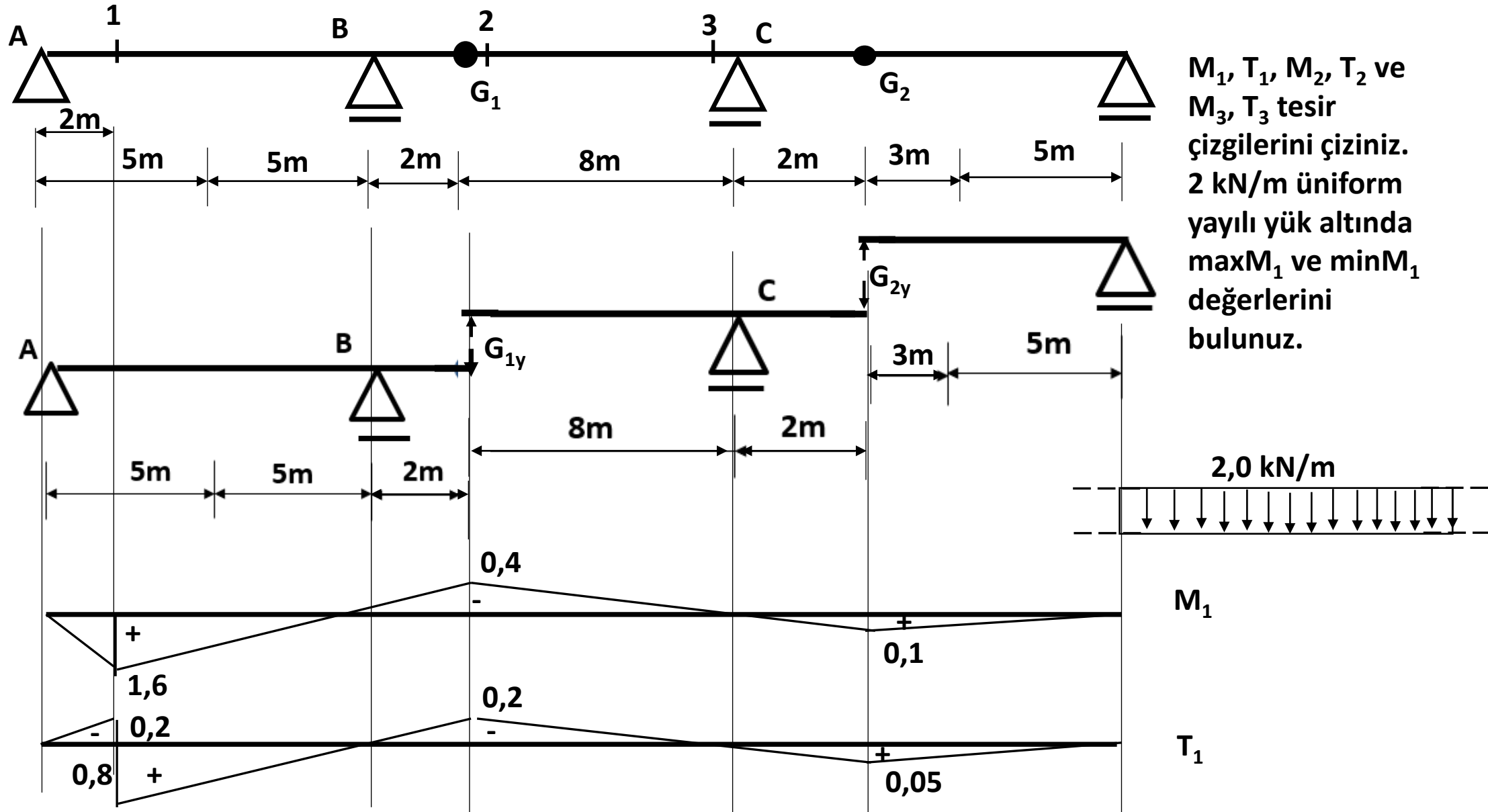
$$0 \leq x_5 \leq 2 \quad M_5 = -x_5 \quad x_5 = 0 \quad M_5 = 0 \quad T_5 = 1$$

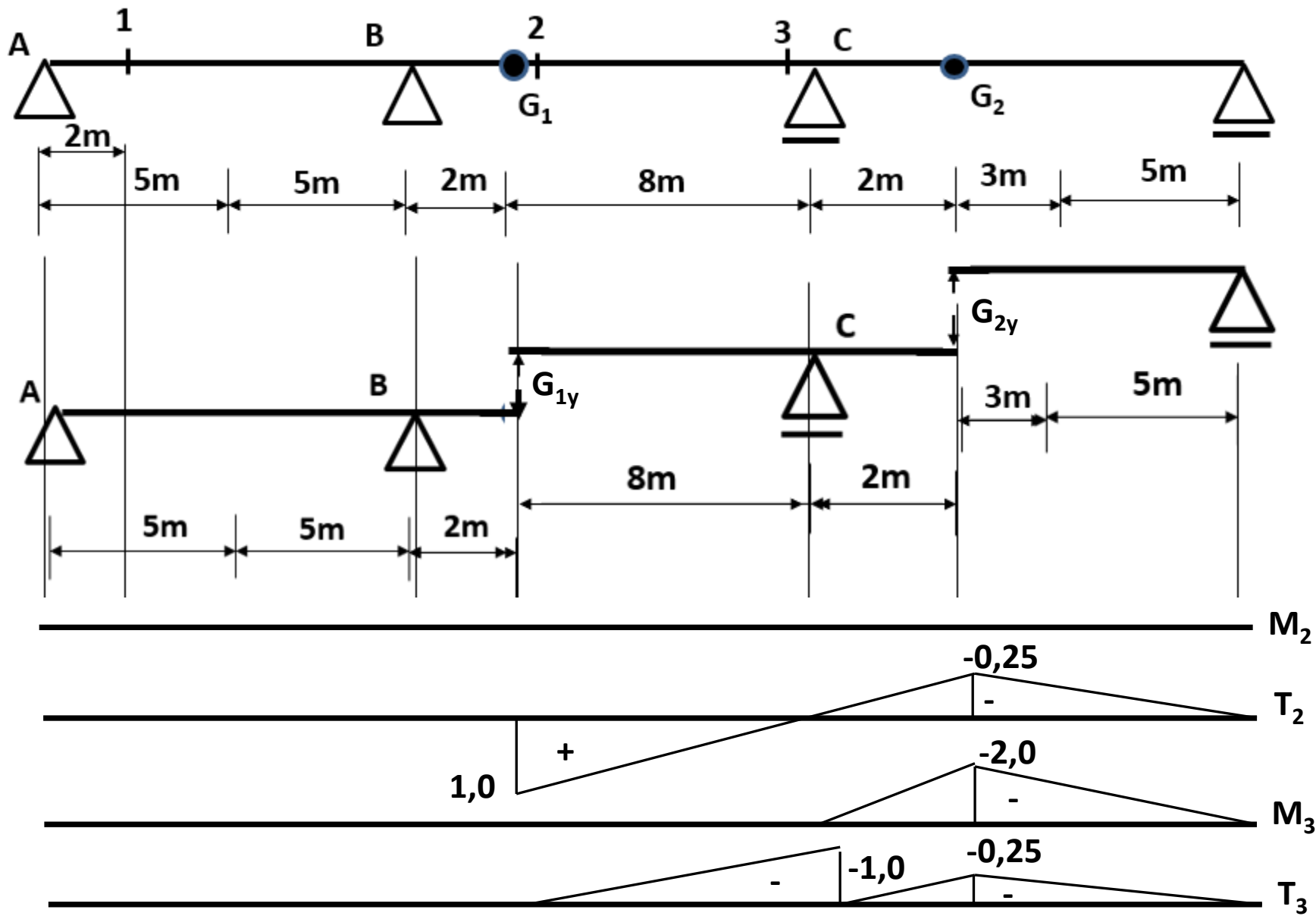
$$x_5 = 2 \quad M_5 = -2 \quad T_5 = 1$$

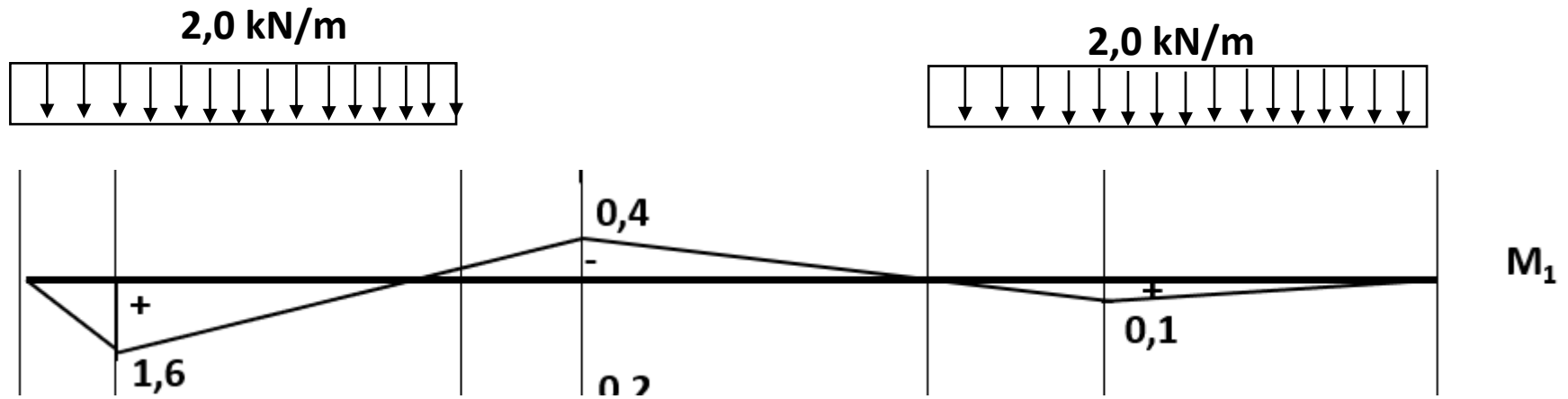
$$0 \leq x_4 \leq 3 \quad G_3 = \frac{x_4}{3} \quad M_5 = 2 \cdot \frac{x_4}{3}$$

$$x_4 = 0 \quad M_5 = 0 \quad x_4 = 3 \quad M_5 = 2 \cdot \frac{3}{3} = 2$$

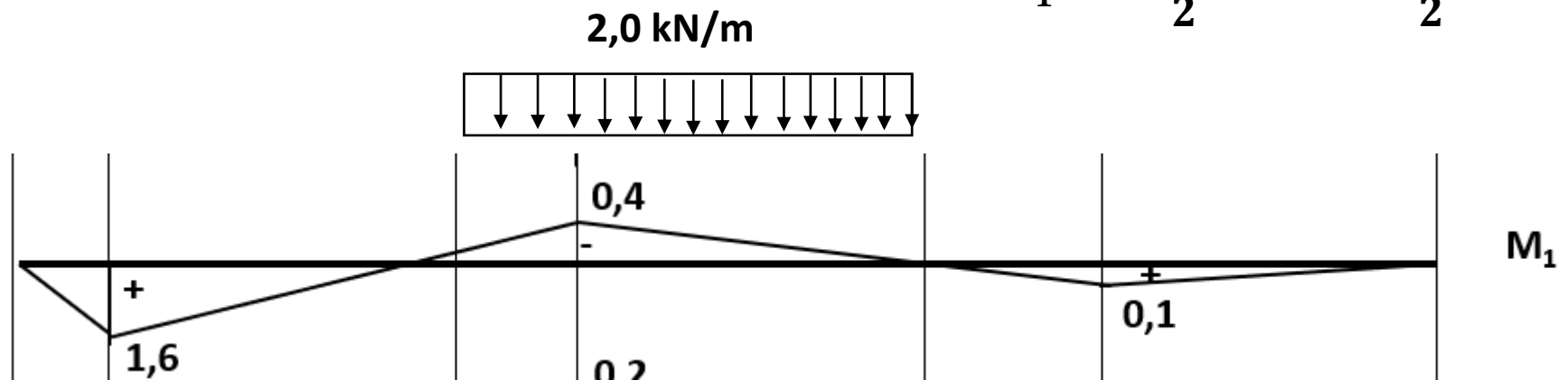








$$MaxM_1 = \frac{1,6 \cdot 10}{2} \cdot 2 + \frac{0,1 \cdot 10}{2} \cdot 2 = 17 \text{ kNm}$$



$$MinM_1 = -\frac{0,4 \cdot 10}{2} \cdot 2 = 4 \text{ kNm}$$